Derivate di funzioni:

$D:\text{costante } k \to 0$	$D:\arccos x \to -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D: x^n \to nx^{n-1}$	$D: arctg\ x \to \frac{1}{1+x^2}$
$D:\sqrt{x} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D: arccotg\ x \to -\frac{1}{1+x^2}$
$D:\sqrt[n]{x^m} \to \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$D: a^x \to a^x \log_e a$
$D: sen\, x \to \cos x$	$D: e^x \to e^x$
$D:\cos x \to -senx$	$D:\log_a x \to \frac{1}{x}\log_a e$
$D: tgx \to \frac{1}{\cos^2 x}$	$D:\ln x \to \frac{1}{x}$
$D: cotgx \to -\frac{1}{sen^2 x}$	$D: x^x \to x^x(\log x+1)$
$D: arcsen\ x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D: arctg\ f(x) \to \frac{1}{1+[f(x)]^2}\cdot f'(x)$
$D:[f(x)]^m \to m[f(x)]^{m-1}\cdot f'(x)$	$D: arccotg\ f(x) \to -\frac{1}{1+[f(x)]^2}\cdot f'(x)$
$D:\sqrt{f(x)} \to \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$	$D: e^{f(x)} \to e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$D:\sqrt[n]{[f(x)]^m} \to \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-m}}}$	$D: a^{f(x)} \to a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\log_e e$
$D: sen\ f(x) \to [\cos f(x)]\cdot f'(x)$	$D:\log f(x) \to \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$D:\cos f(x) \to -[senf(x)]\cdot f'(x)$	$D:\log_a f(x) \to \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\log_a e$
$D: tg\ f(x) \to \frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$	$D: [f(x)]^{g(x)} \to [f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\log f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$
$D: cotg\ f(x) \to -\frac{1}{sen^2 f(x)}\cdot f'(x)$	$D: [f(g(x))] \to f'[g(x)]\cdot g'(x)$
$D: arcsen\ f(x) \to \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)$	$D: [f(x)\cdot g(x)] \to f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$D: arccos\ f(x) \to -\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)$	$D: \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \to \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Integrali notevoli immediati ed integrali con la prima formula di sostituzione

$1)\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}+C$	$7)\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = arcsenf(x)+C$
$2)\int e^x dx = e^x + C$	$8)\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctgf(x)+C$
$3)\int \frac{1}{x}dx = \log\lvert x\rvert + C$	$9)\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx = \log\left(f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}\right)+C$
$4)\int \cos x dx = senx + C$	$10)\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}dx = \log\left(f(x)+\sqrt{f^2(x)-1}\right)+C$
$5)\int senx dx = -\cos x + C$	$11)\int \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+f(x)}{1-f(x)}+C$
$6)\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$	*Casi notevoli dell'applicazione della prima regola di sostituzione*
$7)\int \frac{1}{sen^2 x}dx = -\frac{1}{tgx}+C$	$1)\int \frac{1}{tgx}dx = \log\lvert senx\rvert + C$
$8)\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + C$	$2)\int \frac{1}{senx}dx = \log\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$
$9)\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$	$3)\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left\lvert\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right\rvert + C$
$10)\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$	$4)\int tg\ x\ dx = -\log\lvert\cos x\rvert + C$
$11)\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$	$5)\int \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}+C$
$12)\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}+C$	$\int sen^n x\ dx = -\frac{sen^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}x\ dx$
$1)\int f(x)^\alpha\cdot f'(x)\ dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1}+C$	$\int \cos^n x\ dx = \frac{\cos^{n-1}x\ senx}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\ dx$
$2)\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log\lvert f(x)\rvert + C$	$7)\int sen^2 x\ dx = \frac{x-senx\cdot\cos x}{2}+C$
$3)\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\ dx = e^{f(x)}+C$	$8)\int \cos^2 x\ dx = \frac{x+senx\cdot\cos x}{2}+C$
$4)\int \cos f(x)\cdot f'(x)\ dx = senf(x)+C$	
$5)\int senf(x)\cdot f'(x)\ dx = -\cos f(x)+C$	
$6)\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = tgf(x)+C$	

Se abbiamo: $\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}dx$ *per risolverlo bisogna operare la sostituzione (dopo con le formule trigon. uscirà un seno o un coseno*

$$\frac{x}{k} = sen\ t \to x = k\ sen\ t\ e \to dx = (k\ \cos t)\ dt$$

Limiti notevoli esponenziali

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim_{n\to+\infty} n^2 sen\frac{1}{n^2} = 1$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x} = e$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$

5) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

6) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\lg_e(1+x)}{x} = 1$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{ax} = 1$ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

12) $\lim_{x\to 0} x^\alpha \lg x = 0 \quad \alpha > 0$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\lg x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$

14) $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty ... \alpha > 1$

Limiti notevoli trigonometrici

1) $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1 \to \frac{x}{senx}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{senax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsenx}{x} = 1$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x} = 1$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^3} = \frac{1}{6}$

12) $\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3} = \frac{1}{3}$

Altri limiti notevoli

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\cdot a^n}{n^n} = 0$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^n} = 0$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^{\frac{n^2+n^4}{3}} = e$

se:

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n+bx^{n-1}+c}{x^a+bx^{a-1}+c}$ $n > a = \pm\infty$; $n = a$ = rapp.coeff.; $n < a = 0$

FORME INDETERMINATE

0/0 mettere in evidenza num. e den.

∞/∞ mettere in evidenza

+ ∞ - ∞ razz. o mcd

0 · ∞ trasformo in ∞/∞ o in 0/0 capovolgendo

$0^0;\quad \infty^0;\quad 1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\log_e f(x)}$$

esempi

n/∞ = 0 n/0 = ∞ ∞/n = ∞ 0/n = 0

∞/0 = ∞ ∞^3/∞^3 = 1 (stessa potenza)

Criterio del rapporto:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n} = \to < 1 \quad a_n \to 0$; $\to > 1 \quad a_n \to \infty$

Teorema della media aritmetica:
se la successione an ammette limite allora:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Teorema della media geometrica:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1+a_2...+a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Proprietà delle potenze:

1) $a^{n+m} = a^n\cdot a^m$

2) $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

3) $a^0 = 1$

4) $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

5) $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$Es.: 4^x - 2^{2x+1} \to 2^{2x} - 2^{2x}\cdot 2$
$\to 2^{2x}(1-2)$

Proprietà dei logaritmi:

1) $\log_a x\cdot y = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a\frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a (x)^k = k\log_a x$

4) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

5) $a^{\log_a x} = x$

$Es. 3^x \geq 2 \to x \geq \log_3 2$

$Esemp. 3^x = 2 \to \log_3 3^x = \log_3 2 \to$
$\to x\log_3 3 = \log_3 2 \to x = \log_3 2$

operazioni con i radicali:

$\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} \to \sqrt[3]{2^2}$

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2} = \sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{25\cdot 8}$

$\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[2]{3} = 3$

Scomposizione di un'eq. di 2° grado.

$ax^2+bx+c = x_1, x_2$

$a(x-x_1)(x-x_2)$

Scomposizione con s e p:

$x^2 - sx + p \quad : (x^2-5x+6)$ s=+5 p=+6

Prodotti notevoli

$(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$

$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(a^4-b^4) = (a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$ax^2 + bx + c > 0$

$\Delta > 0$ x1<0 ∪ x2>0

$\Delta = 0$ ∀x € R - (x1= x2)

$\Delta < 0$ ∀x € R

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta > 0$ x1 ; x2 con x1< x2

$\Delta = 0$ x1= x2

$\Delta < 0$ N.S. reale

$ax^2 + bx + c < 0$

$\Delta > 0$ x1<x <x2

$\Delta = 0$ N.S. reale

$\Delta < 0$ N.S. reale

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

FUNZIONI FRATTE:

N ≥ D :divido il numeratore per il denominatore

$\frac{f(x)}{g(x)} = +quindi\int\frac{f(x)}{g(x)} = \int Q(x)dx + \int\frac{R(x)}{g(x)}dx$

$f(x) \mid G(x)$

$R(x) \mid Q(x)$

Q(x) = quoziente R(x) = resto g(x) = divisore

N < D :

1° caso $\Delta > 0$ Bisogna scomporre il denominatore come prodotto, trovare il valore dei parametri A e B e separare l'integrale

2° caso $\Delta = 0$ 1) Scompongo il denominatore facendolo diventare quadrato di binomio e lo elevo ad una potenza negativa (-2)

2) Se il numeratore contiene la x uso i parametri A e B (come nel 1° caso)

3° caso $\Delta < 0$ 1) Riconduco l'integrale alla Formula n° 1.

2) Se il numeratore contiene la x (es. $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$) allora lo trasformo per farlo diventare come f'(x)/f(x)

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{p}{2a}\left(2ax+\frac{2aq}{p}\right)}{ax^2+bx+c} = \frac{p}{2a}\left[\frac{2ax+b+\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}\right]$$

Integrazione per parti:

$f'(x) =$ $f(x) =$

$g(x) =$ $g'(x) =$

$$\int f'(x)\cdot g(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

Regola di decomposizione in somma:

$$\int a\cdot f(x)\pm b\cdot g(x)\ dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$$

Prima formula di sostituzione:

$$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\ dx = \left[\int f(t)dt\right]_{t=\phi(x)}$$

integrazione per parti 2° modo:

$$\int f(x)\cdot g(x)dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)dx$$

dove F(x) è una primitiva immediata di f(x)

PER SOSTITUZIONE

Nell'applicare la formula di sostituzione può essere utile un artificio memonico: infividuata la funzione φ, bisogna sostituire la x con φ(t) nell'integrando e dx con φ' (t)dt

sostituire la x con

$f(x) = t$

$x \to g(t)$

$dx \to (g(t))'\ dt$

INTERGRALE DEFINITO

Sia f(x) una funzione continua in (a , b) si dice integrale definito della funzione e si indica con :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

L' integrale rappresenta l'area della parte di piano racchiusa tra la curva e l'intervallo (a , b). Se l'area sta sopra l'asse delle x è positiva , se sta sotto è negativa.

REGOLA DE L'HOPITAL:

la regola de l'Hopital si applica nelle forme ∞/∞ o 0/0

$0\cdot\infty$ capovolgere

$+\infty-\infty$ MCD o razionalizzazione

Talvolta può essere utile ricondurre alle identità:

$$f - g = f\left(1-\frac{g}{f}\right) = g\left(\frac{f}{g}-1\right)$$

se il limite si presenta nelle forme $0^0;\quad\infty^0;\quad 1^{\pm\infty}$ si ricorre all' identità: $f^g = e^{g\cdot\log_e f}$

Formulario Analisi Matematica II

by www.giuseppechierchia.it

gradi	rad	Sen	Cos	Tg (sen/cos)	Cotg (1/tg)
0	0	0	1	0	$\pm\infty$
18	$\pi/10$ 0.314	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
30	$\pi/6$ 0.523	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\pi/4$ 0.785	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\pi/3$ 1.047	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
72	$2\pi/5$ 1.256	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
90	$\pi/2$ 1.57	1	0	$\pm\infty$	0
180	π 3.1415	0	-1	0	$\pm\infty$
270	$3\pi/2$ 4.712	-1	0	$\pm\infty$	0
360	2π 6.283	0	1	0	$\pm\infty$

f pari $f(-x) = f(x)$
f dispari $f(-x) = -f(x)$

y' = 0 Massimi e minimi
y' > 0 Intervalli crescenti (crescenza)
y' < 0 Intervalli decrescenti (decrescenza)

y'' = 0 Punti di flesso
y'' > 0 Concavità verso l'alto
y'' < 0 Concavità verso il basso

Retta tangente in un punto
$y-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

derivabilità $\Rightarrow$ continuità
continuità $\not\Rightarrow$ derivabilità

Tipi di discontinuità:
1ª specie: La funzione fa un salto
$$\lim_{x\to x_{0^-}} = l_1 \quad \neq \quad \lim_{x\to x_{0^+}} = l_2$$
2ª specie: uno dei due limiti va all'infinito o non esiste
3ª specie: discontinuità di tipo eliminabile: se esiste ed è finito il limite
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ed x0 non appartiene al dominio della funzione

Asintoti obliqui: **y = m x + q** Quando il limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Allora è necessario trovare gli eventuali asintotoi obliqui
$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right]$$
Qualora entrambi i limiti esistano e siano finiti con **m ≠ 0**, allora la retta **y = m x + q** è un asintoto obliquo della funzione

Scala delle velocità:

$\to x^x$
$\to n!$
$\to 4^x$
$\to x^\alpha$
$\to \log_e x$

SERIE

Consideriamo una successione a_n di numeri reali
La somma dei primi n termini della successione detta somma parziale si indica con:
$$s_n = a_1 + a_2 + \dots a_n = \sum_{K=1}^{n} a_k$$
tale successione prende il nome di serie di termine generale a_n
$$\sum_{K=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{K=1}^{n} a_k$$
il termine a primo membro si legge somma o serie per k che va da 1 a +∞, di ak
1) se il limite per n→+∞ di an esiste ed è un numero finito si dice che la serie è **convergente**
2) se il limite di sn vale +∞ oppure -∞ , si dice che la serie è **divergente.**
Una serie divergente o convergente si dice **regolare**.
3) Se non esiste il limite per n→+∞ di sn si dice che la serie è **indeterminata.**
Il carattere di una serie è la sua proprietà di essere convergente o divergente oppure indeterminata.

Condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie:
se la serie $\sum_{K=1}^{\infty} a_n$ è convergente allora la successione a_n tende a zero per n→+∞
Riassumendo:
se il limite della successione è diverso da zero → allora la serie necessariamente diverge.

Proprietà sulle serie:
PROPOSIZIONE 1) se le serie di termine generale a_k e b_k sono regolari allora anche la serie di termine generale $(a_k + b_k)$ è regolare.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
PROPOSIZIONE 2) se la serie di termine generale a_k è regolare, anche la serie di termine generale $c \cdot a_k$ è regolare per ogni c app. a R.
$$\sum_{k=1}^{\infty} c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Una serie è a ***termini non negativi*** se per ogni n ∈ N risulta $a_n \geq 0$.
Una serie è a ***termini positivi*** se $a_n > 0$ per ogni n.
Teorema sulle serie a termini non negativi: una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. È quindi convergente oppure divergente positivamente.

SERIE GEOMETRICA (potenze di un numero)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + h + h^2 + \dots + h^n \dots$$
il numero h si dice ragione della serie geometrica.
Per conoscere il carattere della serie vediamo la soma parziale
$$s_n = 1 + h + h^2 + \dots + h^{n-1} = \frac{1-h^n}{1-h}$$ per la regola di ruffini
si ha ciò moltiplicando e dividendo per (1-h)
il carattere della serie è quindi dato dal limite:
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-h^n}{1-h} = \begin{cases}\text{la serie converge a per } -1 < h < 1 \\ \text{la serie diverge per } h \geq 1 \\ \text{la serie è indeterminata per } h \leq -1\end{cases}$$

SERIE ARMONICA (diverge positivamente)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots\begin{cases}\text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1\end{cases}$$

CRITERIO DI LEIBENIZ (si usa per le serie a segni alterni)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n \qquad a_n \geq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad a_n \geq a_n + 1 \quad \forall n$$
quindi la serie converge

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

Sia $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot a_n = l$

$$l \in [0,+\infty[\text{ e } \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$
$$l \in]0,+\infty] \text{ e } \alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO: solo per le succ. a termini positivi

Sia an una **successione a termini positivi** e supponiamo che esista il limite:
$$l = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$ allora
$$l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \text{ converge}$$
$$l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \text{ diverge}$$
nel caso il limite è = 1 non possiamo dire nulla riguardo al carattere della serie

CRITERIO DELLA RADICE

solo per le succ. a termini positivi
Sia an una **successione a termini non negativi** e supponiamo che esista il limite:
$$l = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$$ allora
$$l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \text{ converge}$$
$$l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \text{ diverge}$$
nel caso il limite è = 1 non possiamo dire nulla riguardo al carattere della serie

CRITERI DI CONFRONTO

Date due serie a termini positivi a_n e b_n
Se
$$a_n \leq b_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$
$$a_n \leq b_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverg.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverg.}$$
da ciò si deduce che:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l \in]0,\infty[\Rightarrow \left\{\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hanno lo stesso carattere}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente} \\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$
$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergente} \\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente}$$

Angoli associati:

$sen(-x) = -senx$
$\cos(-x) = \cos x$
$tg(-x) = -tgx$

$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx$
$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctgx$

$sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -senx$
$tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -ctgx$

$sen(\pi - x) = senx$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$tg(\pi - x) = -tgx$

$sen(\pi + x) = -senx$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$tg(\pi + x) = tgx$

Formule goniometriche

Formule di addizione

$sen(x+y) = senx\cos y + seny\cos x$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - senxseny$
$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\cdot tgy}$

Formule di sottrazione

$sen(x-y) = senx\cos y - seny\cos x$
$\cos(x-y) = \cos x\cos y + senxseny$
$tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx\cdot tgy}$

Formule di triplicazione

$sen3x = 3senx - 4sen^3x$
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$tgx = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}$

Formule di duplicazione:

$sen2x = 2senx\cos x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2x = 1 - 2sen^2x = 2\cos^2 x - 1$
$sen^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}$

Formule di prostaferesi:

$senx + seny = 2sen\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$senx - seny = 2\cos\frac{x+y}{2}sen\frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2sen\frac{x+y}{2}sen\frac{x-y}{2}$

Formule di Werner:

$senx\cdot seny = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
$senx\cdot\cos y = \frac{1}{2}[sen(x+y) + sen(x-y)]$

Formule di bisezione:

$sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
$tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{senx}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{senx}$

Relaz. fond. della trig.

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

Funz.	Dom.	interv. Graf.	Cod.	Monotonia
Sen	-∞ ; +∞	-π/2; (3/2)π	-1 ; +1	oscillante
Cos	-∞ ; +∞	-π ; π	-1 ; +1	oscillante
Tg	-∞ ; +∞	-π/2 ; π/2	-∞ ; +∞	monotona
Cotg	-∞ ; +∞	0 ; π	-∞ ; +∞	decrescente
Arcsen	-1 ; +1	-1 ; +1	-π/2 ; + π /2	monotona
Arccos	-1 ; +1	-1 ; +1	0 ; π	decrescente
Arctg	-∞ ; +∞	-∞ ; +∞	-π/2 ; + π /2	monotona

Regola di Ruffini

$$\left(2x^4 - 18x^2 - x + 3\right) \div (x - d)$$
Nel nostro caso d = 3 : il divisore è (x-3)

	2	0	-18	-1	3
d 3		6	18	0	-3
	2	6	0	-1	0