generalità su spazi

def. spazio vettoriale: uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) è un insieme X su cui sono def.:

1) un'operaz. di somma di vettori che associa ad ogni coppia di vettori (x,y) un vettore $x+y$. soddisfa le prop.:
   - commutativa: $x+y=y+x$
   - associativa: $x+(y+z)=(x+y)+z$
   - $\exists$ dell'elemento neutro $\emptyset$: $x+\emptyset=\emptyset+x=x$
   - $\exists$ dell'opposto $-x$: $x+(-x)=\emptyset$

2) un'operaz. $\cdot$ di prodotto fra un vettore e uno scalare che associa a una coppia (λ,x) con $\lambda\in\mathbb{K}$, $x\in X$ un vettore $\lambda\cdot x$. soddisfa le prop.:
   - distributiva (i) (rispetto somma di vettori): $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
   - distributiva (ii) (rispetto somma di scalari): $x(\lambda+\mu)=x\lambda+x\mu$
   - pseudo associativa: $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$
   - $\exists$ elemento neutro: $1\cdot x=x$

def. spazio a dim. finita: uno spazio X ha dim. finita se $\exists$ un n° finito di elementi $e_1,\dots,e_n\in X$ t.c. ogni altro elemento di X è comb. lin. di essi. Altrimenti è detto infinito

def. spazio di funzioni: sia Ω un insieme qualsiasi e sia

$$F_\Omega=\{f:\Omega\to\mathbb{R}\}$$

potrebbe anche essere $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$

F_Ω è uno spazio vett. su $\mathbb{R}$ con le op. nat. di somma di funz. e prodotto:

$$\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\(\lambda f)(x)=\lambda f(x)\end{cases}$$

teo. (criterio di riconoscimento dei sottospazi)

X spazio vett. su $\mathbb{K}$, $X_0\subset X$ è un sottospazio vett. se:

$$\lambda x+\mu y\in X_0 \quad \forall\, x,y\in X_0,\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}$$

e.s. $C^0[a,b]$, insieme delle funz. continue su $[a,b]$ è un sottospazio vett.

e.s.2 $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, insieme delle funz. periodiche su $\mathbb{R}$ ~~non~~ lo è:

$f(x)=\sin(x)+\sin(\pi x)$ non è periodica a sua volta

def. spazio vettoriale normato: X spazio vett. su $\mathbb{K}$. Si dice norma su X una funz.:

$$\|\cdot\|: X\to \underbrace{[0,+\infty)}_{(\mathbb{R}^+)}$$

con le seguenti prop.:

- annullamento: $\|x\|=\emptyset \iff x=\emptyset$
- omogeneità: $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$
- disuguaglianza triang.: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

$\Rightarrow (X,\|\cdot\|)$ si dice spazio vett. normato es. in $\mathbb{R}^n$ $\quad |\bar{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ norma "usuale" derivante dal teo. di Pitagora

tuttavia non è l'unica norma in $\mathbb{R}^n$. Sono norme anche:

$$|\bar{x}|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

$$|\bar{x}|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

questi 3 norme sono <u>equivalenti</u>: $\quad c_1 |\bar{x}|_\infty \leq |\bar{x}| \leq c_2 |\bar{x}_\infty|$ per qualche cost. $c_1, c_2 > \emptyset$

(analogamente possiamo confrontare $|\bar{x}|$ con $|\bar{x}_1|$ o $|\bar{x}|_\infty$ con $|\bar{x}|_2$ con delle disuguaglianze)

def. spazi metrici: si dice spazio metrico un insieme X dotato di una funz. distanza

$$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

che soddisfa le seguenti prop.:

- annullamento: $d(x,y) = \emptyset \iff x = y$
- simmetria: $d(x,y) = d(y,x)$
- disug. triang.: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

oss.

spazio normato $\overset{\cancel{\Leftarrow}}{\Rightarrow}$ spazio metrico (spazio metrico è più generale)

basta porre $d(x,y) = \|x-y\|$

in particolare: qualunque sottoinsieme di uno spazio vett. normato è uno spazio metrico, <u>pur non essendo più necessariamente uno spazio vett.</u>

e.s. $\quad X = \{ f \in C^\emptyset[a,b] : \|f\|_{C^\emptyset} \leq 1 \}$ con $d(f,g) = \|f-g\|_{C^\emptyset}$ è uno spazio metrico, essendo anche normato ma <u>non è</u> spazio vett.

nozioni insiemistiche

def. intorni sferici: sia (X,d) uno spazio metrico. Si dice intorno sferico (o sfera aperta) di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > \emptyset$ l'insieme:

$$B_r(x_0) = \{ x \in X : d(x, x_0) < r \}$$

punti:
- interni: $\exists B_r(x) \subset E$
- esterni: $\exists B_r(x) \subset E^c$ ← complementare di E
- frontiera: né interni né esterni

def. aperto: ogni punto di E è interno ad E

def. chiuso: E chiuso se E^c aperto

def. insieme limitato: E lim. se $\exists B_r(x_0) \supset E$. In particolare in uno spazio normato:

se $\exists k$ t.c. $\|x\| < k \quad \forall x \in E$ allora è lim.

$$\begin{cases} \mathring{E} : \text{insieme dei pt. interni} \\ \partial E : \text{bordo o frontiera (insieme dei punti di frontiera)} \\ \bar{E} : \text{chiusura di } E,\ \bar{E} = \partial E \cup \mathring{E} \end{cases}$$

def. lim. di successione: sia (X,d) uno spazio metrico e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. si dice che $x_n \to x$ se $d(x_n, x) \to 0$ cioè:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 : x_n \in B_\varepsilon(x)$$

teo. caratterizzaz. successionale dei chiusi

sia (X,d) uno spazio metrico e $C \subset X$.

C <u>chiuso</u> $\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ t.c. $x_n \to x_0 \in X$ si ha $x_0 \in C$

cioè C contiene i limiti delle successioni (convergenti in X) in esso (C)

def. sottoinsieme denso: (X,d) spazio metrico. $E \subset X$ si dice denso in X se $\bar{E} = X$

equivalentemente si dice che E è denso in X se:

$$\forall x \in X\ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E \text{ t.c. } x_n \to x$$

e.s. $E = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

per esempio: $x_n = (1 + 1/n)^n \to e \in \mathbb{R}$

un sottoinsieme denso, pur contenente meno elementi, ci permette di approx. bene quanto vogliamo tutti gli elementi di X

successioni di Cauchy e completezza

def. successioni di Cauchy: sia (X,d) uno spazio metrico e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Si dice che questa succ. è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

intuitivamente: una succ. è di Cauchy se i suoi termini sono sempre più vicini tra loro, o anche $d(x_n, x_m) \to 0$ per $n, m \to \infty$

1) se una succ. converge in (X,d) allora è di Cauchy in (X,d)
2) se una succ. è di Cauchy allora è limitata

e.s. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n = (1+1/n)^n \longrightarrow e$ con $n \in \mathbb{N}$

ma $e \in \mathbb{R}$, mentre $x_n \in \mathbb{Q}$

dunque è di Cauchy, ma non converge in $\mathbb{Q}$

def. spazio metrico completo: uno spazio metrico (X,d) si dice completo se ogni succ. di Cauchy in X è convergente in X

teo.

se (X,d) è uno spazio metrico completo e $C \subset X$ è un insieme chiuso $\Rightarrow (C,d)$ è uno spazio metrico completo

def. spazio di Banach: uno spazio vett. normato, completo $\underbrace{\text{rispetto alla distanza della norma}}_{\text{(def. la distanza con la norma)}}$, si dice di Banach

e.s.1 $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Banach

e.s.2 un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico completo ma non è uno spazio di Banach perchè non è spazio vett.

Integrale secondo Lebesgue

- questa nuova def. di int nasce dalla necessità di ottenere dei teo. di passaggio al limite sotto al segno di integrale più flessibili

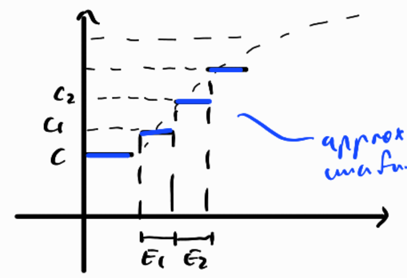
- e.s. la richiesta della convergenza uniforme spesso non si ha nelle applicaz., in gen. l'int. non è def. su $[a,b]$

- alcune funz. (es. $\chi_{\mathbb{Q}} \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \varnothing & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ funz. di Dirichlet) non sono int. secondo Riemann

- vogliamo una nozione di int. che coincida con quella di Riemann quando le funz. sono Riemann integrabili ma che vada oltre

- vogliamo integrare funz. che sono "molto" più discontinue rispetto a quelle Riemann integrabili

$f: [a,b] \to [c,d]$



faccio la partiz. lungo y e vedo la misurabilità degli insiemi su x

con Riemann la misura era $b-a$. Qua serve una nuova misura

def. σ-algebra: sia Ω un insieme. Si dice σ-algebra (su Ω) una famiglia M di sottoinsiemi di Ω cioè: $M \subseteq P(\Omega)$ tale che:

$\llcorner P(\Omega)$: insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω, compreso Ω e $\varnothing$ (insieme delle parti)

* $\Omega \in M$
* se $E \in M \Rightarrow E^c \in M$
* se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una succ. di insiemi di M, allora $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{\text{unione}} \in M$

- gli insiemi di M si dicono misurabili
- (Ω, M) si dice spazio misurabile

proposizione (prop. σ-algebra)

se M è una σ-algebra, M è chiusa anche rispetto alle seguenti operaz. insiemistiche

* unione finita

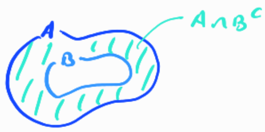
$$E_1, \dots, E_n \subset M \Rightarrow E_1 \cup \dots \cup E_n \in M$$

* intersez. finita o numerabile

$$\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in M$$

* diff. insiemistica ($A \setminus B = A \cap B^c$)

$$A, B \in M \Rightarrow A \setminus B \in M$$



def. spazio di misura (Ω, M, μ): sia (Ω, M) uno spazio misurabile. Si dice misura su (Ω, M) una funz.:

$$\mu: M \to [0, +\infty]$$

che sia numerabilmente additiva. Cioè:

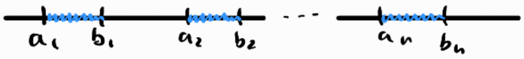
data una succ. $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ t.c. $\underbrace{E_i \cap E_j = \varnothing, \; i \neq j}_{E_i, E_j \text{ disgiunti}}$ si ha:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$$

in tal caso (Ω, M, μ) si dice spazio di misura

OSS.

la condiz. che $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ con E_i, E_j disgiunti generalizza la ben nota proprietà elementare tale che dati $E_1, \dots, E_n$ intervalli disgiunti, $\mu(E_j) = \mu([a_j, b_j]) = b_j - a_j$ $(b_j > a_j, \forall j)$ si ha:

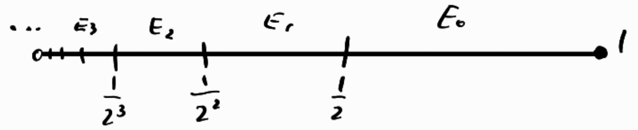


$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j]\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu([a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

(nel caso infinito numerabile)

serie geo.: $\sum_{n=\emptyset}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q|<1$

considero $E = (0,1]$ e suddivido:



$E_0 = (\frac{1}{2}, 1]$, $E_1 = (\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^1})$, $E_2 = (\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2})$, ..., $E_n = (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$

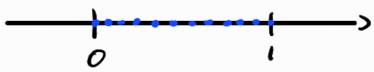
$(0,1] = E = \bigcup_{n=\emptyset}^{+\infty} E_n$

$\mu((0,1]) = 1 - \emptyset = 1$

$\hookrightarrow \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=\emptyset}^{+\infty} E_n\right) \overset{!!!}{=} \sum_{n=\emptyset}^{+\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=\emptyset}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{serie geo.}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1/2} = 1 \Rightarrow$ la nostra teo. della misura è compatibile con una geometria "elementare"

attenzione che se si scrive $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ quando A non è numerabile si hanno stranezze

$(0,1] = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \{\alpha\}$



$\underbrace{\mu(\{\alpha\}) = \emptyset}_{\text{misura del punto}} \Rightarrow \sum \mu\{\alpha_i\} = \emptyset$

stranezza

ma si ha che $\mu((0,1]) = 1$

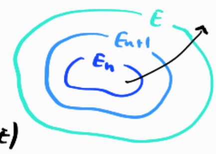
descrivo l'intervallo come unione dei punti $\alpha \in \mathbb{R}$ tra 0 e 1, insieme di punti non numerabile

- dalla numerabilità additiva seguono importanti prop. della misura

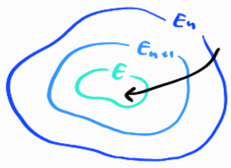
teo. (prop. dello spazio di misura (Ω, M, μ))

sia (Ω, M, μ) uno spazio di misura. Allora:

* $\mu(\emptyset) = \emptyset$
* μ è finitamente additiva, cioè: $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$, $\forall E_1, \dots, E_n$ E_i, E_j disgiunti (finito)
* μ è monotona, cioè: $\forall A, B \subset M$ con $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$
* μ è condizionalmente sottrattiva cioè: $\forall A, B \subset M$, con $A \subseteq B$ e $\mu(B) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
* μ è continua dal sotto, cioè se $\{E_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$ t.c. $E_n \subseteq E_{n+1}$ $\forall n$ e $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$ $\Rightarrow \mu(E_n) \to \mu(E)$



* μ è condizionalmente continua da sopra: cioè se $\{E_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$ e $E_n \supseteq E_{n+1}$ $\forall n$ e $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = E$ e $\mu(E_1) < +\infty$ allora $\mu(E_n) \to \mu(E)$



* μ è numerabilmente subadditiva: cioè se $\{E_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$ ma E_n non sono disgiunti necessariamente si ha: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$ se son disgiunto ho l'uguaglianza

Insiemi di misura nulla

conseguenza della monotonia di μ

corollario: se $E, E_0 \subset M$ e $E_0 \subset E$ con $\mu(E)=\emptyset$ allora $\mu(E_0)=\emptyset$

nel corollario sia E che E_0 sono misurabili

che cosa capita se:

* E misurabile e $\mu(E)=\emptyset$
* $E_0 \subset E$ ma di E_0 non sappiamo se è misurabile

attenzione! se $E_0 \notin M$ e $E_0 \subset E \in M$ con $\mu(E)=\emptyset$ NON È DETTO che $\mu(E_0)=\emptyset$

(in generale non si può dedurre che $\mu(E_0)=\emptyset$ cioè E_0 misurabile)

↳ **def. misura completa:** sia (Ω, M, μ) uno spazio di misura. Si dice che la misura μ è completa se i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla sono tutti misurabili (e quindi hanno misura nulla)

e.s. 1 **misura del conteggio**

sia Ω insieme e $M = P(\Omega)$. $\mu: M \to [0, +\infty]$

$$\mu(A) = \begin{cases} n^\circ \text{ elementi di } A, & \text{se } A \text{ finito} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e.s. 2 **misura di Dirac**

Sia Ω un insieme, $x_0 \in \Omega$, $M = P(\Omega)$. $\mu: M \to [0, +\infty]$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

teo. misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

* $\exists$ una σ-algebra $\mathcal{L}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ detta σ-algebra di Lebesgue (o degli insiemi misurabili secondo Lebesgue)
* $\exists$ una misura μ su $\mathcal{L}$ detta misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ con le seguenti prop.

1) la σ-algebra $\mathcal{L}$ contiene tutti gli insiemi (numerabili):
   - aperti
   - chiusi
   - $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ $\quad \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aperti
   - $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ $\quad \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ chiusi

   la misura def. sulla σ-algebra $\mathcal{L}$ può misurare tutti questi insiemi

oss. 1 $\mathcal{L}$ contiene tutti gli insiemi costruibili esplicitamente

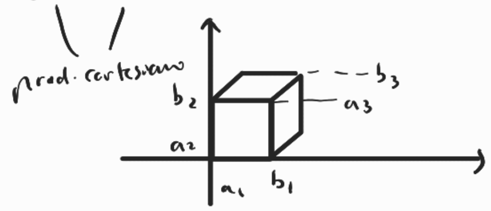
oss. 2 $\exists$ insiemi non misurabili, l'esistenza si dimostra con procedimenti non costruttivi (assioma della scelta)

2) la misura di Lebesgue estende la misura elementare

infatti (detto I = n-celle) $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

prod. cartesiano

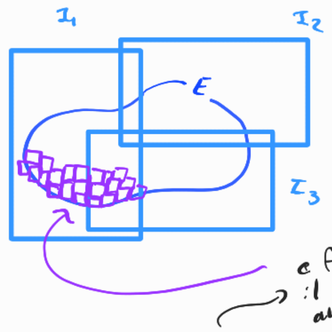
$\mu(I) = |b_1 - a_1| \cdot \ldots \cdot |b_n - a_n|$



teo. costruz. esplicita misura di Lebesgue

$\forall$ insieme E misurabile la misura di Lebesgue si def. in termini delle n-celle I:

* $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ siano n-celle se siano in $\mathbb{R}^n$
* supponiamo che $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_k \supset E$



- faccio variare tutti gli ∞ modi di coprire E, e prendo inf.
- allora la misura di Lebesgue di E è data da:

$$\Rightarrow \mu(E) = \inf_{\{I_k\}} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(I_k) \right\}$$

e facendo tendere il n° di celle all'∞

l'estremo inf. è calc. al var. di tutte le possibili coperture di E con l'unione delle celle $\{I_k\}$

teo. invarianza e completezza

* la misura di Lebesgue è invariante per traslaz. cioè $\mu(E) = \mu(E')$
* la misura di Lebesgue è completa cioè detto $(\Omega, \mathcal{L}, \mu_{\mathcal{L}})$, i sottoinsiemi di Ω che hanno misura nulla sono misurabili

vantaggi della misura di Lebesgue

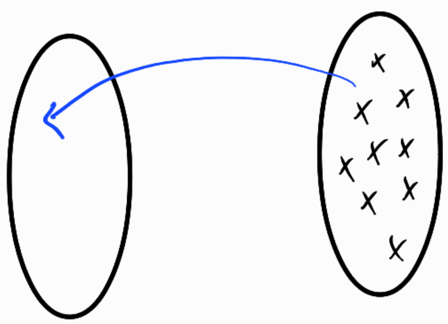
* misura quasi tutti gli insiemi di $\mathbb{R}^n$ e nel caso di figure geo. la mis. lunghezza, o area, o volume si calc. in modo elementare fornisce lo stesso val. numerico
* in part. la misura punti è nulla $\mu\{x\} = \emptyset$ $x \in \mathbb{R}$ poiché μ è numerabilmente additiva ogni insieme numerabile ha misura nulla $\mu(\mathbb{Q}) = \emptyset$ $\mathbb{Q}$ razionali

quindi $\mu([0,1]) = 1$

ma i num. raz. in $[0,1]$ non danno contributo

se tolgo insiemi numerabili non me ne accorgo. e.s. tra $[0,1]$ tolgo i razionali non me ne accorgo, non cambio la sua misura

assioma della scelta



quale elemento scelgo da mettere in un altro insieme?

impossibilità di def. una funzione che mappa un elemento tra tutti quelli uguali all'altro insieme

↳ però esiste la funz.!

spazi di funzioni continue

def. convergenza puntuale successioni: sia $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (potrebbe essere anche $I \subseteq \mathbb{R}^n$). Si dice che $\{f_n\}$ converge nel punto $x_0 \in I$ se: $\lim_{n\to+\infty} \{f_n(x_0)\}$ converge

(tutti questi risultati valgono anche per le serie, che sono casi part. delle successioni)

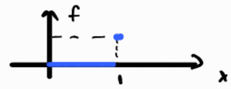
si dice che f_n converge puntualmente in I se $f_n(x)$ converge $\forall x_0 \in I$.
In questo caso poniamo $f(x) := \lim f_n(x), \ \forall x \in I$

oss.

se le f_n funz. sono cont. in I, non è detto che $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ sia cont. $\Rightarrow$ l'operaz. di limite può cambiare molto la funz. che ottengo come risultato. Anzi, nella maggior parte dei casi è così

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \ x \in I$ significa che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ : \ n > n_0(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

e.s. $f_n(x) = x^n$ per $x \in [0,1]$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ f_n sono cont. f no



def. convergenza uniforme: sia $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oppure $I \subseteq \mathbb{R}^n$). Si dice che la succ. $\{f_n\}$ converge uniformemente in I alla funz. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se:

$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ per $n \to \infty$ (quando il val. $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ essendo il sup mentre tutti gli altri $|f_n(x) - f(x)| \to 0$, il maggiore $\to$ non dipende da x, tutti gli altri pt. saranno sicuramente controllati fra $f \pm \varepsilon$)

oss.

nel caso della conv. uniforme si ha che: $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \ : \ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

In questo caso abbiamo che $\forall x \in I$ l'n_0 non dipende dal pt. x quindi l'approx. $f_n(x) - f(x)$ è inferiore di ε per tutti i pt. di I. Questo è perché nel fare l'estremo sup. tolgo la dipendenza da x

e.s.

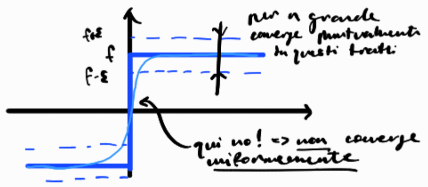
$f_n(x) = x^n, \ x \in [0, 1/2]$

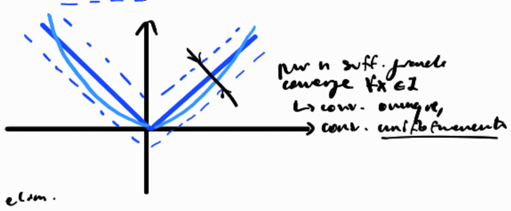
$f(x) := \lim_{n\to\infty} x^n = 0, \ \forall x \in [0, 1/2]$

$\sup_{x \in [0,1/2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1/2]} |x^n - 0| = \frac{1}{2^n}$

quindi $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [0,1/2]} |x^n - 0| = \lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$

$\hookrightarrow$ conv. uniforme per def.





oss.

nello spazio $C^0([a,b])$ abbiamo introdotto la norma $\|f\|_{C^0} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f|$ se $[a,b]$ chiuso e lim. (per Weierstrass). Osserviamo che la conv. uniforme è la conv. in C^0 con la norma appena def.

$f_n(x) \to f(x)$ unif. in $I \Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ per $n \to \infty$ ma $\|f_n - f\|_{C^0} := \sup_{x\in[a,b]} |f_n - f|$

norma associata alla convergenza uniforme. In base alla scelta della norma nello spazio, posso def. un'altro tipo di convergenza.

teo. Convergenza uniforme e continuità

siano $f_n : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un pt. $\bar{x} \in I$, e supponiamo che: $f_n \to f$ uniformemente in I.
allora $\Rightarrow f$ è cont. in $\bar{x}$. Se f_n sono cont. su tutto I allora f è cont. su tutto I

teo. convergenza uniforme e integrabilità

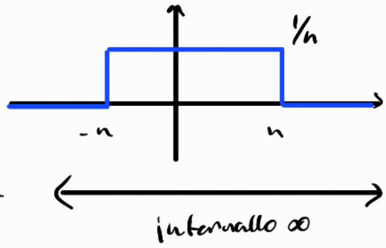
siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funz. lim. e Riemann integrabili, $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, $[a,b]$ limitato
allora $\Rightarrow f$ è Riemann integrabile e $\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\,dx$

oss.

in questo teo. è cruciale che $[a,b]$ sia limitato

è molto lim. Quasi mai ho $f_n \to f$ uniformemente, e $[a,b]$ chiuso e limitato, sono interessato generalmente a int. generalizzati nel fare il lim., quindi tip. $[0,+\infty)$ aperto.

$\hookrightarrow$ è uno dei motivi per cui vogliamo andare oltre l'integrale di Riemann infatti $f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & |x| \le n \\ \emptyset, & |x| > n \end{cases}$



$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - \emptyset| = \frac{1}{n} \to \emptyset$ converge uniformemente

Ma $\int_{\mathbb{R}} \emptyset \, dx = \emptyset$ $(|x|>n)$

e $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{-n}^{n} 1/n \, dx \, dx = \frac{1}{n} [x]_{-n}^{n} = 2$ $(|x|<n)$

$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 2$ e $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n = \emptyset$ non va bene perché $[a,b]$ non è lim

f_n conv. a $\emptyset$

teo. condiz. di Cauchy per conv. unif.

siano $f_n : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ succ. di funz., e sia $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funz.
allora $\Rightarrow$ $f_n \to f$ converge <u>uniformemente</u> su $I \Leftrightarrow$ (condiz. di Cauchy)
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ t.c. $\forall n,m \ge n_0, \; \forall x \in I \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

non dipende da x

è la "solita" def. di lim. secondo Cauchy, solo applicata a una succ. di <u>funz.</u>, non di numeri

teo. completezza di uno spazio di funzioni

sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e lim. allora $\Rightarrow$ lo spazio vett. normato $C^0(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$ con la norma $\|f\|_{C^0(K)} := \max_{x\in K} |f(x)|$ è completo cioè $\Rightarrow$ è uno spazio di <u>Banach</u>

sarebbe $\|f\|_{C^0(K)} = \sup_{x\in K} |f(x)|$ ma essendo K chiuso e lim. per Weierstrass sup $\Leftrightarrow$ max

dim.

sia $\{f_n\} \subset C^0(K)$ una succ. di Cauchy in $C^0(K)$

dim. che f_n conv. in $C^0(K)$

dire che è di Cauchy in $C^0(K)$ significa che:
$\forall \varepsilon > \emptyset \; \exists n_0 : \forall n,m \ge n_0, \; \forall x \in K \Rightarrow \underline{\|f_n - f_m\|_{C^0}} < \varepsilon$

e quindi, <u>poiché</u> $\underline{\|f_n - f_m\|_{C^0}} = \underline{\max_{x\in K} |f_n(x) - f_m(x)|}$
<u>f_n converge a una certa f uniformemente.</u>

Inoltre, poiché la conv. uniforme implica che la funz. lim. f sia continua si ha: $f \in C^0(K)$
quindi $C^0(K)$ è completo

allora: $C^0(K)$ è <u>completo</u> e <u>normato</u> $\Rightarrow$ è di <u>Banach</u>

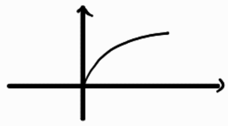
<u>oss.</u>

se su $C^0(K)$ cambiamo la norma possiamo perdere la completezza:
lo spazio $C^0[-1,1]$ con la norma integrale $\|f\|_{L^1[-1,1]} := \int_{-1}^{1} |f(x)| \, dx$ non è completo.
Quindi non è uno spazio di Banach.

cioè se def. in questo modo diverso la norma, <u>non ho più la convergenza uniforme</u>.

e.s.

$$f_n := \begin{cases} \sqrt[n]{x} & 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt[n]{x} & -1 \le x < 0 \end{cases}$$



osserviamo che $f_n \in C^0[-1,1]$ e f_n è di Cauchy

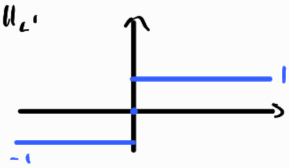
$$\|f_n - f_m\|_{L^1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = 2\int_0^1 \sqrt[n]{x} - \sqrt[m]{x}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{1/n+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{1/m+1}}{\frac{1}{m}+1}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right] \to \emptyset \quad \text{per } n,m \to \infty$$

$\hookrightarrow$ è di Cauchy

tuttavia la succ. <u>non</u> converge ad una funz. cont.
infatti si può dim. che nella norma $\|.\|_{L^1}$ converge alla funz.:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$



che chiaramente non è in $C^0([-1,1])$

quindi $\{f_n\}$ è di Cauchy ma non converge a $f \in C^0$

$\hookrightarrow$ $(C^0, \|.\|_{L_1})$ <u>non</u> è uno spazio di <u>Banach</u>

Spazi di funz. derivabili

consideriamo ora lo spazio $C^1[a,b]$

teo. convergenza uniforme e derivazione

sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una succ. $f_n \in C^1([a,b])$

supponiamo che:

* $f_n'(x) \to g(x)$ uniformemente in $[a,b]$
* $f_n(x) \to f(x)$ <u>puntualmente</u> in $[a,b]$

allora $\Rightarrow$
* $f_n \to f$ <u>uniformemente</u> in $[a,b]$
* $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = g(x)$

dal precedente teo. segue che se in $C^1[a,b]$ consideriamo la norma:

$$\|f\|_{C^1[a,b]} = \|f\|_{C^0[a,b]} + \|f'\|_{C^0[a,b]}$$

si ha:

teo.

lo spazio $(C^1[a,b], \|f\|_{C^1[a,b]})$ è spazio di <u>Banach</u>

dim.

Sia $\{f_n\}$ una succ. di Cauchy in $C^1[a,b]$. Per def. di norma in C^1

$$\|f_n\|_{C^1[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f_n'(x)|$$

quindi
$f_n(x)$ e $f_n'(x)$ sono di Cauchy

quindi per il teo. precedente

$f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$
$f_n' \to g$ uniformemente in $[a,b]$

e f, g sono cont., e $f' = g$

quindi

$$\|f_n - f\|_{C^0[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to \emptyset, \quad n\to\infty$$
$$\|f_n' - f'\|_{C^0[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f_n'(x) - f'(x)| \to \emptyset, \quad n\to\infty$$

$\hookrightarrow$ $\|f_n - f\|_{C^1[a,b]} \to \emptyset$ per $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $C^1[a,b]$ con norma $\|\cdot\|_{C^1}$ è spazio di Banach

def. sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e def. $C^k(\bar\Omega) = \{f : \bar\Omega \to \mathbb{R};\ f \in C^0(\bar\Omega)$ e $\partial^\alpha f \in C^0(\bar\Omega)\ \forall \alpha$ con $|\alpha| \le k\}$

poniamo $\|f\|_{C^k(\bar\Omega)} := \|f\|_{C^0(\bar\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha f\|_{C^0(\bar\Omega)}$ $\quad \left(\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \right)$

teo. gli spazi $C^k(\bar\Omega)$ sono spazi di Banach

• ricordiamo che (Ω, M, μ) è uno spazio di misura qualsiasi e supponiamo che tale misura sia COMPLETA (completa: sottoinsiemi di insiemi con misura nulla sono misurabili e hanno anch'essi misura nulla)
$\Rightarrow$ come è il caso di $(\Omega, \mathcal{L}, \mu_L)$

• vogliamo def. $\int f \, d\mu$, l'integrale rispetto alla misura μ
• quali funzioni posso considerare? Cioè quali funz. descrivo come "misurabili"?

Proposizione: 4 condizioni equivalenti

Sia (Ω, M) uno spazio misurabile qualsiasi e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti le condizioni:

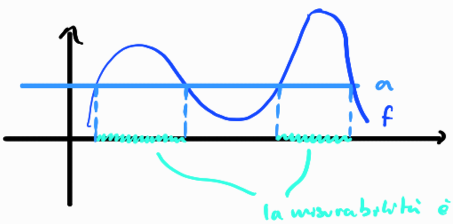
I) $\{x \in \Omega : f(x) > a\} \in M, \ \forall a \in \mathbb{R}$
II) $\{x \in \Omega : f(x) \geq a\} \in M, \ \forall a \in \mathbb{R}$ (M è la famiglia di insiemi misurabili)
III) $\{x \in \Omega : f(x) < a\} \in M, \ \forall a \in \mathbb{R}$
IV) $\{x \in \Omega : f(x) \leq a\} \in M, \ \forall a \in \mathbb{R}$

OSS.

visualizziamo la condiz. (I)

$f: \Omega \to \mathbb{R}$

$\{x \in \Omega : f(x) > a\}$



cioè la (I) significa che $\forall a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \Omega : f(x) > a\}$ è misurabile

def. funz. misurabile: sia (Ω, M) uno spazio misurabile e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$
si dice che f è misurabile (su (Ω, M)) se vale una delle condiz. (I), (II), (III), (IV)

esempi di funz. misurabili:

• funz. caratteristiche

sia (Ω, M) uno spazio misurabile e $E \subset \Omega$. Definiamo la funz. caratt. di E come:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ \emptyset & x \notin E \end{cases} \quad (\text{se } x \notin E \text{ comunque } \in \Omega)$$

allora al var. di $a \in \mathbb{R}$ si ha che l'insieme $\{x \in \Omega : f(x) > a\}$ è uguale a uno di questi insiemi: $\Omega, E, \emptyset$

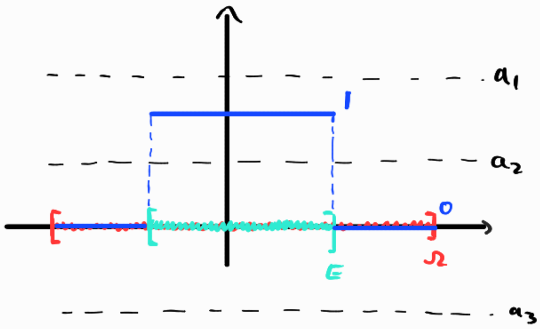
siccome $\Omega, \emptyset \in M$ per definizione concludiamo che: χ_E misurabile $\Leftrightarrow$ E misurabile

OSS.

gli insiemi non misurabili esistono (assioma della scelta) ma non sono descrivibili con metodi costruttivi. Dunque trovare funz. non misurabili è difficile quanto trovare insiemi non misurabili, ossia molto difficile. Cioè la richiesta che una funz. sia misurabile è una richiesta debole.

visualizzaz.:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases} \qquad E \subset \Omega$$



$\{x \in \Omega : \chi_E(x) > a_1 ,\ a_1 \geq 1\} = \emptyset$

$\{x \in \Omega : \chi_E(x) > a_2 ,\ 0 \leq a_2 < 1\} = E$

$\{x \in \Omega : \chi_E(x) > a_2 ,\ a_3 < 0\} = \Omega$

• funz. continue

sia $\mathbb{R}^n$ con la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.
se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua allora $\Rightarrow f$ è misurabile

$\{x \in \Omega : f(x) > a\}$

$\{x \in \Omega : f(x) \geq a\}$ — aperti

$\{x \in \Omega : f(x) < a\}$ — chiusi

$\{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$

la misura di Lebesgue misura qualunque insieme aperto o chiuso $\Rightarrow$ sono tutti insiemi misurabili $\Rightarrow$ f è misurabile

• la completezza della misura implica la seguente proposizione:

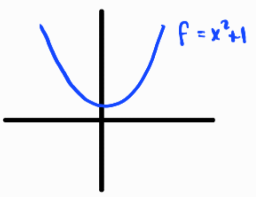
proposizione

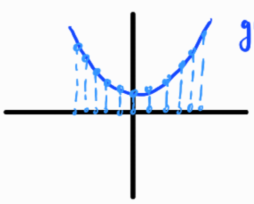
siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ con f misurabile

$g = f$ tranne i punti di un insieme di misura nulla

allora $\Rightarrow$ g è misurabile

• la locuzione $f = g$ quasi ovunque (cioè eccetto per i punti di un insieme di misura nulla) su un insieme Ω significa che su un un insieme di misura nulla le funzioni si possono ridefinire in modo arbitrario





$$g(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow f = g$ q.o. $(\mu(\mathbb{Q}) = \emptyset)$

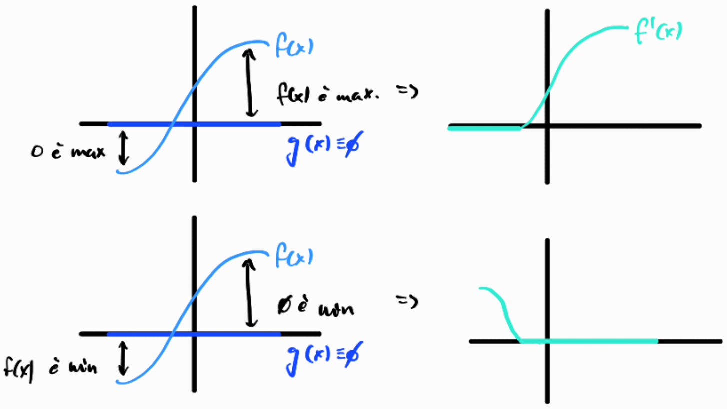
(tutti gli insiemi misurabili per Lebesgue hanno misura nulla)

operaz. su funz. misurabili

teo. (operaz. sulle funz. misurabili)

siano $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili. Allora:

1) $f \pm g$; $f \cdot g$; λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ sono misurabili
2) $\frac{f}{g}$ misurabile se $g \neq \emptyset$ su un insieme di misura nulla
3) $f^+ = \max(f, \emptyset)$, $f^- = -\min(f, \emptyset)$, $|f|$ sono misurabili
4) se $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \phi(f)$ misurabile (composta)
5) se $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \psi(f, g)$ misurabile (composta in due var.)



teo. (misurabilità e passaggio al limite)

sia $f_n: \Omega \to [-\infty, +\infty]$ $n \in \mathbb{N}$ una succ. di funz. def. q.o. in Ω e misurabili

supponiamo che $f(x) := \lim_n f_n(x)$ q.o. in Ω

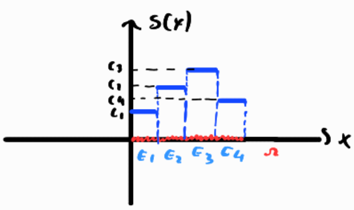
allora $\Rightarrow f$ è misurabile

(cioè: l'insieme delle funz. misurabili è chiuso rispetto al limite)

- def. le somme di Lebesgue di una funz.

def. funz. semplici: si dice che una funz. $s: \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice se è misurabile e se assume un val. finito di valori

- una funz. semplice è del tipo



$s(x) = c_1 \chi_{E_1}(x) + c_2 \chi_{E_2}(x) + c_3 \chi_{E_3}(x) + c_4 \chi_{E_4}(x)$

- In gen una funz. semplice si scrive come: $s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x)$ $j \in \mathbb{N}$

  dove $E_1, \dots, E_n$ insiemi misurabili e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

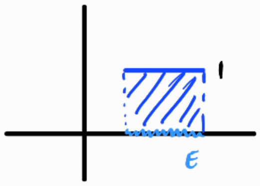
  e $\chi_{E_j}(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_j \\ \emptyset & x \notin E_j \end{cases}$

- In generale prendiamo $E_i \cap E_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

oss.

se vogliamo che l'integrale rappresenti l'area sotto la curva se $f = \chi_E(x)$ si definisce:

$$\int_\Omega \chi_E(x)\, d\mu(x) := \mu(E)$$

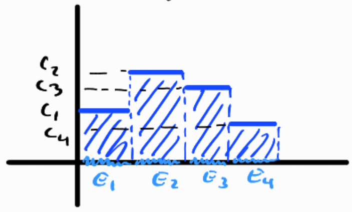


(intuitivamente posso pensare che $d\mu(x)$ è la misura dell'insieme proiettato sull'asse x dal corrispondente val. di $f(x)$ quando partiziono l'asse y. È un po' come la misura di dx, anche se non è così davvero)

- ma oltre l'int. di Riemann. dx lo si vedeva come $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$ dove Δx era una diff. di coordinate. Qui $\mu(E_j)$ è una misura di Lebesgue di un insieme, che non "vede" insiemi numerabili

e la linearità dell'integrale impone

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int_\Omega \chi_{E_j}(x)\, d\mu(x)}_{\mu(E_j)} = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu(E_j)$$



teo. approx. con funz. semplici

sia $f: \Omega \to \underbrace{[0, +\infty]}_{(f \text{ positiva})}$ misurabile

allora $\Rightarrow$ $\exists$ una succ. monotona crescente di funz. semplici $\{S_k(x)\}$ t.c. $S_k(x) \longrightarrow f(x)$ puntualmente in Ω

(se f è limitata allora è una convergenza uniforme)

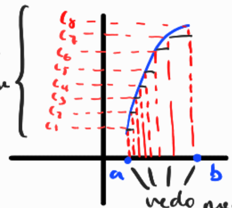
def. integrale di Lebesgue per funz. positive

sia $f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile

allora si def., per s funz. semplice

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x)\, d\mu(x) := \sup_s \left\{ \int_\Omega s(x)\, d\mu \;:\; s(x) \le f(x) \right\}$$

al contrario dell'int. secondo Riemann dove si suddivideva l'asse x con l'int. di Lebesgue si suddivide l'asse y



vedo poi i corrispondenti E_j proiettati su x e le loro rispettive misure $\mu(E_j)$

$\llcorner$ difatti il sup. è un'op. di lim. $\Rightarrow$ $\int_\Omega s(x)\, d\mu := \sum_{j=0}^{n} c_j \mu(E_j)$ $n \to \infty$ mi dà il sup.

$\mu(E) \to \emptyset$ $\Rightarrow$ notaz. $d\mu$

E_j diventano sempre più piccoli man mano che migliorano l'approx.

- da questa def. si possono dedurre i seguenti fatti:

$\Omega = (a, b)$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$

$s_k(x)$ successione di funz. semplici approssimanti: $s_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x)$

- vantaggio che guardo la misura degli insiemi E_j
- per la def. dell'integrale di Lebesgue si fanno var. le funz. semplici s t.c. $s(x) \le f(x)$

oss.

con la def di Lebesgue si trattano nello stesso modo domini Ω limitati e illimitati

inoltre osserviamo che la misura di Lebesgue "non vede" gli insiemi di misure nulle quindi in part. $\mu(\mathbb{Q}) = \emptyset$ e quindi:

$f(x) \equiv \emptyset$ in $[0,1]$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \text{ in } [0,1] \\ \emptyset & x \notin \mathbb{Q} \text{ in } [0,1] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ q.o. in $[0,1]$

$\llcorner$ $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x)\, d\mu = \emptyset$!! che prima non era integrabile secondo Riemann

def. integrale di Lebesgue

sia $f: \Omega \to [-\infty, \infty]$ misurabile

si dice che f è integrabile secondo Lebesgue se $\int_\Omega |f(x)| d\mu(x) < +\infty$

in tal caso si pone

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) := \int_\Omega f^+(x)\, d\mu(x) - \int_\Omega f^-(x)\, d\mu(x)$$

e risulta $\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$

la def. dell'int. di Lebesgue si estende alle funz. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ in modo naturale

def. $(L^1(\Omega, M, \mu))$: indichiamo con $L^1(\Omega, M, \mu)$ o più semplicemente con $L^1(\Omega)$ l'insieme delle funz. sommabili o integrabili secondo Lebesgue

teo. proprietà dell'integrale

siano $f, g \in L^1(\Omega, M, \mu)$. Allora

A) $\int_\Omega c_1 f + c_2 g\, d\mu = c_1 \int_\Omega f\, d\mu + c_2 \int_\Omega g\, d\mu$ (linearità)

B) se $f \leq g$ q.o. in $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu$ (monotonia 1)

C) $E, F \subset \Omega$, $E \subseteq F$, $f \geq 0 \Rightarrow \int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$ (monotonia 2)

D) (annullamento)

i) se $\mu(E) = \emptyset \to \int_E f\, d\mu = \emptyset$

ii) se $f(x) = \emptyset$ q.o. in $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f\, d\mu = \emptyset$

iii) se $\int_\Omega |f|\, d\mu = \emptyset \Rightarrow f(x) = \emptyset$ q.o. in Ω

attenzione!

- $L^1(\Omega, M, \mu)$ è uno spazio vett. (linearità dell'integrale)
- si può def. una norma e diventa uno spazio normato ponendo:

$$\|f\|_{L^1(\Omega, M, \mu)} := \int_\Omega |f|\, d\mu(x)$$

↳ questa def. soddisfa:

i) $\|\lambda f\|_{L^1} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^1}$

ii) $\|f + g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$

ma non soddisfa $\|f\|_{L^1} = \emptyset \Leftrightarrow f(x) = \emptyset$

(ciò che si può dire è $\|f\|_{L^1} \Rightarrow f(x)$ q.o. in Ω)

- per ottenere una norma dobbiamo identificare le funz. uguali tra loro q.o.

↳ diremo che f identifica una delle funz. in una classe di equivalenza $\{f\}$

$\Rightarrow \{f\} = \{g \in L^1 : g = f \text{ q.o.}\}$

- applicheremo la def. di norma alle classi. Penseremo sempre a classi di eq. e non a funz. singolarmente
- $f(x) = \emptyset$ e $\chi_\mathbb{Q}(x)$ sono della stessa classe
- guardo le funzioni globalmente non puntualmente

(analogia con i razionali: $\{\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}\}$)

in modo rigoroso:

$\mathcal{L}^1(\Omega, M, \mu) = L^1(\Omega, M, \mu)$ con identificaz. $\{f\}$ q.o. in $\mathcal{L}^1(\Omega, M, \mu)$

$\|f\|_{L^1} = 0 \iff \{f\} = 0$

quindi diventa una norma

<u>oss.</u> il fatto di poter ottenere una norma identificando le funz. a meno di un insieme di misura nulla ci fa intuire che il val. punto per punto di una funz. di L^1 non ha molto senso.
Ciò che importa è il comportamento "globale"

Integraz. di succ. di funz. e spazi L^p

teo. (convergenza monotona)

sia $f_n : \Omega \to [0,+\infty]$ una succ. di funz. misurabili, monotona crescente cioè $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$

allora $\Rightarrow$ $\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_n f_n \, d\mu$

oss.

non ho vincoli sulla dim. di Ω! la nuova def. secondo Lebesgue è molto flessibile

teo. di Lebesgue (o della convergenza dominata)

sia $f_n : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ una successione di funz. misurabili, convergente puntualmente q.o. ad una certa funz. f : $f_n \to f$ q.o. in Ω

supponiamo $\exists g$ integrabile/sommabile in Ω t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. in Ω (g: funz. dominante integrabile)

allora $\Rightarrow$ $\int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu \to 0$ per $n \to +\infty$

in particolare: $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu = \int_\Omega f(x) \, d\mu$ $\left(= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \, d\mu \right)$

cioè il limite si scambia con l'integrale

oss.

il teo. della conv. dominata è molto più utile rispetto al teo. di passaggio al lim. sotto segno di integrale di Riemann.

infatti nella teo. di Riemann per avere il passaggio del lim. sotto l'integrale richiedeva:

1) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate, integrabili secondo Riemann
2) $f_n \to f$ uniformemente su $[a,b]$
3) $[a,b]$ limitato

nel teo. di Lebesgue richiedo solo che:

1) f_n misurabili (cioè praticamente sempre)
2) $|f_n| \leq g$ q.o. in Ω
3) $f_n \to f$ puntualmente q.o.

- la richiesta di convergenza puntuale q.o. è molto meno forte della richiesta di convergenza uniforme
- c'è un insieme di misura nulla dove le cose possono andare "male", ma non viene "visto" dall'integrale di Lebesgue
- $[a,b]$ non deve necessariamente essere limitato (non ho vincoli su Ω)

esempio

$$f_n(x) = |x|^{1/n} \quad \text{in } [-1,1]$$

si ha $f_n \to 1$ q.o. ma non uniformemente

↳ per $x=0$ ho che $f_n(0)=1$ però $\|f_n - 1\|_\infty = 1 \neq \emptyset$:

$$\sup_{x_0\in[-1,1]} |f_n - f| = \underbrace{\sup_{x_0\in[-1,1]} \left| |x_0|^{1/n} - 1 \right|}_{\text{l'estremo sup. è per } x_0=0} = 1$$

$\Rightarrow$ non è applicabile la teo. di Riemann

tuttavia osserviamo che:

1) $|f_n(x)| \leq 1 = g(x) \quad \forall x \in [-1,1], \ \forall n \in \mathbb{N}$

2) $f_n \to 1$ q.o.

3) f_n misurabili $\forall n \in \mathbb{N}$

per cui, per il teo. di Lebesgue: $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

teo. di completezza di L^1

lo spazio vettoriale normato $L^1(\Omega, M, \mu)$ def. identificando funzioni uguali q.o. su Ω è completo con la norma integrale: $\|f\|_{L^1(\Omega,M,\mu)} := \int_\Omega |f|\,d\mu$

↳ (ragiono con le classi di equivalenza)

oss.

- normato + completo $\Rightarrow$ L^1 è uno spazio di Banach
- $\|f\|_{L^1(\Omega,M,\mu)}$ è la norma "naturale" per questo spazio come $\|f\|_{C^0(K)} := \sup_{x\in K} |f(x)|$ lo era per gli spazi C^k

spazi L^p

sia (Ω, M, μ) uno spazio con μ (misura generica, anche non di Lebesgue) completa

def. $L^p(\Omega)$: sia $p \in [+1, +\infty)$ definiamo: $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \int_\Omega |f|^p\,d\mu < +\infty \right\}$

- per $p=1$ ritroviamo lo spazio L^1
- gli spazi $L^p(\Omega)$ sono vett. per $p\geq 1$: la combinaz. lin. di funz. misurabili è misurabile e vale la disuguaglianza:

$$\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu \leq 2^{p-1}\left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu + \int_\Omega |g|^p\,d\mu\right) < \infty \Rightarrow f+g \in L^p$$

per ipotesi $f,g \in L^p$ dunque i due integrali sono $<\infty$

dunque L^p sono vettoriali

• vorremo che siano anche spazi normati

↳ la norma naturale su $L^p(\Omega)$ è: $\|f\|_p := \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

serve elevare $(\ )^{1/p}$ per far sì che $\left(\int_\Omega |\lambda f|^p d\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

tuttavia la disuguaglianza triang. non è banale, occorre un teo.:

teo. disuguaglianza di Minkowski

$\forall p \in [1,+\infty]$, $f,g \in L^p(\Omega)$ vale: $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ (disuguaglianza triang. in $L^p(\Omega)$)

dunque:

1) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$
2) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$
3) $\|f\|_p = \emptyset \Leftrightarrow f = \emptyset$ (considerando classi di equivalenza)

$\Rightarrow L^p$ sono normati

teo. disuguaglianza di Hölder

siano $p, q \in (1,\infty)$ t.c. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$

allora $\Rightarrow$ $fg \in L^1(\Omega)$ e vale la disuguaglianza di Hölder: $\int_\Omega |fg| d\mu \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

oss.

- escludo $p \vee q = 1$ senò $p \vee q \to \infty$
- se $p = q = 2$, $f,g \in L^2(\Omega)$ allora $\Rightarrow$ $fg \in L^1(\Omega)$ e $\underbrace{\int_\Omega |fg|\, d\mu \le \|f\|_2 \|g\|_2}_{\text{disuguaglianza di Schwarz}}$

  in part. L^2 è uno spazio di Hilbert

caso particolare $p = \infty$

def. funz. essenzialmente limitate: poniamo che:

↳ $L^\infty(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili t.c. $\exists k > 0 : |f(x)| \le k$ q.o. in $\Omega \}$

le funz. di $L^\infty(\Omega)$ sono limitate a meno di un insieme di misura nulla

def. su $L^\infty(\Omega)$ la norma $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \{ k > 0 : |f| \le k$ q.o. $x \in \Omega \}$

in particolare si ha: $|f(x)| \le \|f\|_\infty$

oss.

- se f è limitata in $\Omega \Rightarrow \|f\|_\infty < +\infty$
- $f(x) = 1/x$ non è limitata essenzialmente su $\mathbb{R}$. Infatti non è limitata neanche per $x \neq \emptyset$ in quanto $\nexists k > 0 : \frac{1}{|x|} < k \quad \forall x \neq \emptyset$

- $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

  questa è essenzialmente limitata cioè $f \in L^\infty(\mathbb{R})$

  infatti $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$ quasi ovunque

  (notiamo che f limitata $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f essenzialmente limitata)

teo. completezza $L^\infty(\Omega)$

gli spazi $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ sono completi

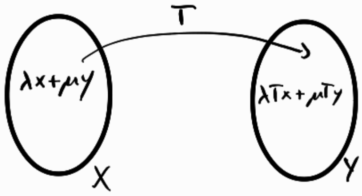
- dunque: $L^p(\Omega)$ normati + completi $\Rightarrow$ sono spazi di Banach

teo. di densità

lo spazio $C^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, +\infty]$

operatori e funzionali lineari continui

def. operaz. tra spazi vett. normati : una applicaz. $T: X \longrightarrow Y$ si dice lineare se
$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty \quad , \quad \forall x,y \in X, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} (= \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$$



teo. continuità di T in modi equivalenti

siano X, Y due spazi vett. normati e $T: X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Allora $\Rightarrow$ sono equivalenti le condiz.:

(I) T è continuo in $x = \emptyset$

(II) T è continuo in tutti i punti

(III) T è limitato cioè: $\exists k > 0$ t.c. $\|Tx\|_Y \leq k\|x\|_X \ , \ \forall x \in X$

posso esprimere la (III) come:
$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$$

def. norma di un operatore

sia $T: X \longrightarrow Y$ un operatore lineare continuo. Allora $\Rightarrow$ def. norma di T il num.:
$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \quad (= k)$$
ci da un stima di quanto è "grande" l'operatore T

- lo spazio degli operatori lineari e continui $T: X \longrightarrow Y$ si indica con: $\mathcal{L}(X,Y)$ o $\mathcal{B}(X,Y)$
- si pone $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ o $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$

teo. $\mathcal{B}(X,Y)$ spazio di Banach

se X, Y spazi vett. normati e Y è di Banach allora $\Rightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ è di Banach.
cioè se Y è completo allora $\Rightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ è completo (e di conseguenza di Banach in quanto è anche normato)

es. di op. lin.

$X = Y = C^0[a,b]$

$Tf := \int_a^x f(t)\,dt \ , \ x \in [a,b]$

$C^0([a,b])$;

$$\|Tf(x)\| = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt \leq \int_a^x \sup_{x \in [a,b]} |f(t)|\,dt = \|f\|_{C^0} \int_a^x dt \leq \|f\|_{C^0}(b-a)$$
$$\left(\|f\|_{C^0} = \sup_{x \in [a,b]} |f(t)|\right)$$

$$\|Tf\|_{C^0[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |Tf| \leq (b-a)\|f\|_{C^0([a,b])}$$

per cui $\Rightarrow$ $\|Tf\|_{C^0} \leq k\|f\|_{C^0}$ $\quad (k = b-a)$

limitato quindi continuo

funzionali lineari e continui

funzionale lin.: caso part. di op. lin. e cont. t.c. $T: X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Associa a una funzione un numero (e.s. traccia, integrale, norma)

- lo spazio $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ si dice spazio duale e si indica con X'
- il punto cruciale è che essendo $\mathbb{R}$ spazio di Banach lo spazio $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ è di Banach anche se X è solo spazio vett. normato
- la norma su X' è def. da $\|T\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \emptyset}} \frac{|Tx|}{\|x\|_X}$ (norma $\Leftrightarrow$ modulo perché $Tx \in \mathbb{R}$)

e.s. funzionale di valutaz. (o δ di Dirac)

$X = C^0[a,b]$ (la δ non ha senso in L^p in quanto si parla di classi di equivalenza, cioè del comportamento globale. Non avrebbe senso parlare del valore della funzione in un punto)

$T: X \to \mathbb{R}$

$Tf := f(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$

è lineare:

$$T(\lambda f + \mu g) = (\lambda f)(x_0) + (\mu g)(x_0) = \lambda f(x_0) + \mu g(x_0) = \lambda Tf + \mu Tg$$

è limitato:

$$|Tf(x)| = |f(x_0)| \le \max_{x \in [a,b]} |f(x)| = \|f\|_{C^0}$$

(quindi continuo, e posso def. una norma. Limitatezza e cont. sono condiz. eq. per op. lin.)

$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq 0}} \frac{|Tf|}{\|f\|_{C^0}} \le 1$ $\quad$ $T: X \to \mathbb{R}$ lineare + continuo $\Rightarrow$ è un elemento del duale $\Rightarrow T \in \underbrace{(C^0[a,b])'}_{\text{duale di } C^0}$

e.s. integrale definito

$X = C^0[a,b]$

$Tf = \int_a^b f(t)\,dt$ (è lineare, è un integrale)

è limitato:

$$|Tf| = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt \le \int_a^b \underbrace{\|f(t)\|_{C^0}}_{\substack{= \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \\ \text{è un numero}}} dt \le \|f\|_{C^0} \int_a^b dt = \|f\|_{C^0} \cdot (b-a)$$

(è limitato e quindi continuo)

def. la norma:

$$\sup_{\substack{f \in X \\ f \neq 0}} \frac{\|Tf\|_X}{\|f\|_{C^0}}$$

$\Rightarrow |T| \le b - a$

e.s. funzionali sugli spazi L^p

sia $X = L^p(\Omega)$, (Ω, M, μ) un generico spazio di misura

fisso $g \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ (q e p exp. coniugati)

allora $\Rightarrow Tf := \int_\Omega fg\,d\mu$

$T: L^p \to \mathbb{R}$ è lin. e cont.

linearità: $T(\lambda f_1 + \mu f_2) = \int_\Omega \lambda f_1 + \mu f_2 \, d\mu = \lambda \int_\Omega f_1 g \, d\mu + \mu \int_\Omega f_2 g \, d\mu = \lambda T f_1 + \mu T f_2 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall f_1, f_2 \in L^p$

la limitatezza (cioè continuità) deriva dalla <u>disuguaglianza di Hölder</u>: $\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p, g \in L^q$

Infatti:

$$|Tf| \leq \int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|g\|_q \cdot \|f\|_p$$

<u>fissata</u> $g \in L^p$: si pone $K := \|g\|_q$

e quindi: $\|T\|_{(L^p)'} \leq K$ $\Rightarrow T \in \mathcal{L}(L^p, \mathbb{R}) = (L^p)'$ (T appartiene al duale di L^p)

<u>oss.</u>

si può dim. che: $\|T\|_{(L^p(\Omega))'} = \|g\|_{L^q(\Omega)}$ con p, q exp. coniugati

cioè:

ogni $g \in L^q(\Omega)$ induce un funzionale lineare e continuo su $L^p(\Omega)$

$T_g(\cdot) = \int_\Omega g(\cdot) \, d\mu$

$T_g : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$T_g \in (L^p(\Omega))'$ (è lineare e continuo, come visto precedentemente)

$\|T_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q(\Omega)}$

Inoltre:

$L^q(\Omega)$, $\|f\|_q = \left(\int_\Omega |f|^q \, d\mu\right)^{1/q}$ $\Longleftrightarrow$ $(L^p)' := \{T : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\|T\|_{L^{p'}} = \sup_{\substack{f \in L^p \\ f \neq 0}} \frac{|Tf|}{\|f\|_{L^p}}$

- cioè un elemento di $(L^p)'$ lo scrivo con una funz. di L^q
  ↳ tramite una funz. g, lego g ad un suo funzionale "equivalente" $(T_g(\cdot) = \int g(\cdot) \, d\mu)$
  (T_g: funzionale corrispondente in $(L^p)'$; $g \in L^q$)
- cioè $\nexists$ funzionali lineari e continui su L^p che non provengono da una $g \in L^q$

teo. di rappresentazione di Riesz

sia $1 \leq p < +\infty$. Allora $\Rightarrow$ $\forall$ funzionale lin. e cont. $T \in (L^p(\Omega))'$ (cioè $\forall T \in \mathcal{L}(L^p, \Omega) = (L^p)'$)
$\exists \, g \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ t.c. : $T(f) = \int_\Omega g f \, d\mu$ e vale : $\|T\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q(\Omega)}$

• quindi lo spazio duale di $L^p(\Omega)$ si può identificare con $L^q(\Omega)$

↳ cioè $\forall T: L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ lin., cont., si scrive tramite l'integrale e una funz. $g \in L^q$: $Tf = \int_\Omega g f \, d\mu$

attenzione!

$(L^\infty)' \supset L^1(\Omega)$ $\quad \cancel{=}$

cioè tutte le $g \in L^1(\Omega)$ descrivono un funzionale in $(L^\infty(\Omega))'$ ma non tutti i funzionali in $(L^\infty(\Omega))'$ posson esser descritti da g in $L^1(\Omega)$

oss.

se $p = q = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

allora $\Rightarrow$ il duale di $L^2(\Omega)$ $(\mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathbb{R}) = (L^2(\Omega))')$ si descrive con funzioni dello stesso spazio:

$(L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$

• La grande fortuna degli spazi $L^p(\Omega)$ è dovuta al fatto che lo spazio duale è molto semplice e questo ha importanza per la formulaz. debole delle soluz. delle eq. diff.

• Inoltre $L^2(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Hilbert ed è lo spazio in cui si ambienta l'eq. di Schrödinger

oss. $\quad \delta : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $\delta(f) := f(\emptyset)$ è lin. : $\delta(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(0) = (\lambda f)(0) + (\mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \delta f + \mu \delta g$

è anche lim. : $|\delta(f)| = |f(0)| \le \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_{C^0}$

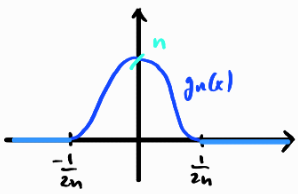
Intro informale alle derivate deboli e alla δ di Dirac

δ di Dirac

funzionale $\begin{cases} \delta : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \delta f := f(0) \end{cases}$

oss.

$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & |x| \le \frac{1}{2n} \\ \emptyset & |x| > 1/2n \end{cases}$ con $g_n(0) = n$



assumiamo che $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = 1$

al lim. si dovrebbe avere: $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = 1$

$f_n \to \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ per $n \to \infty$

$\Rightarrow$ non si può portare dentro l'int. di Lebesgue perché $\lim_{n \to +\infty} f_n = \delta = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

ma δ è nulla q.o. e quindi $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx = \emptyset \neq 1$

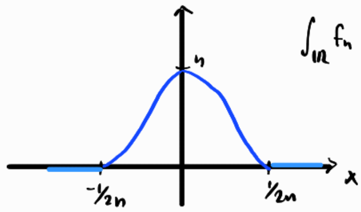
↳ come interpreto δ?

teo. della media:

per $h \in C^0([a,b])$ $\exists \alpha \in [a,b]$ t.c. $\int_a^b h(x)\,dx = h(\alpha)(b-a)$

riconsidero allora le f_n e il seguente funzionale:

$L_n(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f_n \varphi(x)\,dx$; $L_n : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$



$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \ \forall n$

allora posto $h_n(x) := f_n(x)\varphi(x)$

applico il teo. della media ad $h_n(x)$ su $[a,b]$ con $a = \frac{-1}{2n}$; $b = \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow L_n(\varphi) = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \left[\frac{1}{2n} - \left(\frac{-1}{2n}\right)\right] f_n(\alpha_n)\varphi(\alpha_n)$ dove $\alpha_n \in [a,b]$

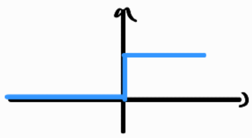
per $n \to \infty$ $\frac{1}{n} \cdot \overbrace{f_n(\alpha_n)}^{\to n} \varphi(\underset{\alpha_n \to \phi}{\alpha_n}) \longrightarrow \cancel{\frac{1}{n}} \cdot \cancel{n} \cdot \varphi(0) = \varphi(0)$

cioè il funzionale L_n è proprio δ !

$\hookrightarrow$ il modo corretto di interpretare la δ di Dirac è come funzionale su C^0 oppure su $C_0^\infty(\mathbb{R})$

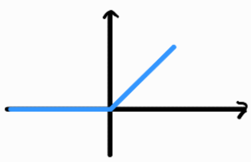
problema di derivare funz. che non sono derivabili in senso classico (cioè con derivata intesa come limite del rapporto incrementale)

come faccio a derivare $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$?



oppure:

In qualche senso $r'(x) = H(x)$ dove $r(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

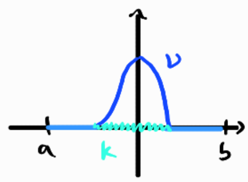


oss.

int. per parti: $\int_a^b \mu' v\,dx = [\mu v]_a^b - \int_a^b \mu v'\,dx$

se $v \in C_0^1([a,b]) \Rightarrow C_0^1([a,b]) = \{v \in C^1([a,b])$ t.c. $v \neq \phi$ solo su $k\}$

$k \subset [a,b]$



allora $\Rightarrow [\mu v]_a^b = \mu(b)\underbrace{\cancel{v(b)}}_{\phi} - \mu(a)\underbrace{\cancel{v(a)}}_{\phi} = \phi$

la formula diventa: $\int_a^b \mu' v = -\int_a^b \mu v'$ $\quad \forall \mu \in C^1([a,b])$, $\forall v \in C_0^1([a,b])$

ma osservo che se $\nexists \mu'$ (tipo se $\mu = H(x)$) (inteso nel senso classico di derivata) $\Rightarrow$ il primo membro $\nexists$,

ma $\exists$ il secondo membro !! (purché μ sia integrabile)

allora in tal caso def. μ': $\boxed{\int_a^b \mu' \nu := -\int_a^b \mu \nu'}$, $\forall \nu \in C_0^1([a,b])$

considero ora $a = -\infty$, $b = +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} r'(x)\, \nu\, dx := -\int_{\mathbb{R}} r(x) \nu' \qquad \forall \nu \in C_0^1(\mathbb{R})$$

$$-\int_{\mathbb{R}} r(x)\nu' = \underbrace{-\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \nu'\, dx}_{\emptyset} - \int_0^{+\infty} x \nu' dx = -\int_0^{+\infty} x \nu' dx \underset{\text{integro per parti}}{=} -[x\nu(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \nu(x) dx$$

$$= -[\underset{\nu(\infty)=0}{0} - \overset{x=0}{0}] + \int_0^{\infty} \nu(x)\, dx$$

$\hookrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} r'(x)\, \nu\, dx = \int_0^{+\infty} \nu(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} H(x) \nu\, dx \qquad \forall \nu \in C_0^1(\mathbb{R})$

cioè $r' = H$ ma dentro a un funzionale

$\int_{\mathbb{R}} r' \nu dx = \int_{\mathbb{R}} H \nu dx \qquad \forall \nu \in C_0^1(\mathbb{R})$

vediamo adesso $H'(x)$ cos'è:

$$\int_{\mathbb{R}} H' \nu\, dx := -\int_{\mathbb{R}} H \nu' dx = -\int_0^{+\infty} \nu' dx = -\int_0^{+\infty} \frac{d\nu}{dx} \cdot dx = -\int_0^{\infty} d\nu = -[\nu]_0^{+\infty} = -[0 - \nu(0)]$$

$\hookrightarrow$ $\langle H', \nu \rangle = \int_{\mathbb{R}} H' \nu\, dx = \nu(0) = \delta(\nu) = \langle \delta, \nu \rangle \qquad \forall \nu \in C_0^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $\langle H', \nu \rangle = \langle \delta, \nu \rangle$

cioè $H' = \delta$ nel senso dei funzionali (cioè interpreto δ e H' come funzionali) **(derivata debole)**

- non tutti i funzionali lin. e cont. su $C_0^1(\mathbb{R})$ si possono rappresentare con l'int. di Lebesgue. Dovrei scrivere $\int_{\mathbb{R}} H' \nu$ come $H'(\nu)$ cioè H' def. un funzionale che agisce su ν
- con questa nuova def. si amplia di molto la classe delle soluz. delle eq. diff.

e.s.

$-y'' + y = f$, $f \in L^2(a,b)$

$\hookrightarrow$ è chiaro che almeno $\nexists y''$ nel senso classico (f potrebbe essere anche la funz. di Dirichlet) allora prendo $v \in C_0^1(a,b)$ moltiplico la eq. diff. per v e integro:

$$\underbrace{\int_a^b -y''v}_{} + \int_a^b yv = \int_a^b fv \qquad \forall v \in C_0^1(a,b)$$

derivata debole: $\int (y')'v := -\int y'v'$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b y'v' + \int_a^b yv = \int_a^b fv \qquad \forall v \in C_0^1(a,b)$$

- a questo punto ho perso y'' e la sol. consiste in: fissato $f \in L^2$, trovare una y in "qualche spazio di funz." che soddisfi:

$$\int_a^b y'v' + \int_a^b yv = \int_a^b fv \qquad \forall v \in C_0^1(a,b)$$

se poniamo $\begin{cases} B(y,v) := \int_a^b y'v' + \int_a^b yv \\ L_f(v) := \int_a^b fv \end{cases}$

possiamo riformulare la sol. debole: si ricerca y in qualche spazio X (da specificare) t.c.: $B(y,v) = L_f(v) \quad \forall v \in C_0^1(a,b)$

$\hookrightarrow$ la sol. y viene cercata dentro ai funzionali

oss. se fisso $f \in L^2$ e la relaz.:

$$B(y,v) = L_f(v) \quad \underline{\forall v \in C_0^1(a,b)} \qquad ?$$

allora y deve essere una funz. fissata dal dato f

Spazi di Hilbert

- questi spazi funzionali sono particolari spazi di Banach. Il punto fondamentale è che la norma in uno spazio di Hilbert proviene da un prod. scalare

↳ in fisica $\bar{F}\cdot d\bar{P} = dL$ quindi le norme che provengono dal prod. scalare controllano l'energia di un sistema

spazi vettoriali con prodotto interno

def. sia V uno spazio vett. sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Si dice che V è uno spazio vett. dotato di prod. interno (o prod. scalare) o che V è uno spazio pre-Hilbertiano se (oltre a $(V,+,\cdot)$) è def. una ulteriore operaz. prodotto scalare:

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$$

con le prop.:

A) linearità prima componente

$$(\lambda x + \mu y, z) = (\lambda x, z) + (\mu y, z) \qquad \forall x,y \in V, \quad \forall \mu,\lambda \in \mathbb{K}$$

B) commutazione (I)

$$(x,y) = (y,x) \;, \quad \underline{\mathbb{K}=\mathbb{R}} \;, \quad \forall x,y \in V$$

C) commutazione (II)

$$(x,y) = (y,x)^* \quad \text{se } \underline{\mathbb{K}=\mathbb{C}} \;, \quad \forall x,y \in V$$

D) positività

$$(x,x) \geq \emptyset \quad \forall x \in V \quad \text{e} \quad (x,x) = \emptyset \iff x = \emptyset$$

oss.

- se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dalla (A) si ha $\Rightarrow$ da $(x,y) = (y,x)$

  ↳ linearità rispetto la seconda componente

- se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ invece dalla (A) segue:

$$(z, \lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y, z)^* = (\lambda x, z)^* + (\mu y, z)^* = \lambda^*(x,z)^* + \mu^*(y,z)^*$$
$$= \lambda^*(z,x) + \mu^*(z,y)$$

cioè $\Rightarrow (z, \lambda x + \mu y) = \lambda^*(z,x) + \mu^*(z,y) \quad \forall x,y,z \in V, \; \underline{\forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}}$

↳ in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si dice prodotto scalare complesso o sesquilineare

- nel caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\forall x \in V$ poiché si ha $(x,x) = (x,x)^*$ si ha che $(x,x) \in \mathbb{R}$

  vero solo se l'elemento ha solo parte reale

- $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j^* \Rightarrow (x,x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j x_j^*}_{|x|^2}$

  ↳ per forza quindi $(x,x) \geq \emptyset$

esempi:

- $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(\bar{x},\bar{y}) := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

- $V = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$$

- $V = C^0[a,b]$ (a valori in $\mathbb{C}$), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$(f,g) = \int_\Omega f \bar{g} \, dx$$

• $\ell^2 = \{ \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} ;\ \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$ dove $\{x_n\}$ numeri reali

$(x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j$

ℓ^2 è l'analogo discreto di L^2 e di $\mathbb{R}^n$, $n=\infty$

teo. proprietà spazi pre-Hilbertiani

sia V uno spazio pre-Hilbertiano. Allora:

I) vale la disuguaglianza di Schwarz $\Rightarrow |(x,y)| \le \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}$, $\forall x,y \in V$

II) ponendo $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ si ottiene una norma (detta prodotto interno) e si ha $\Rightarrow |(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$

III) la norma del prodotto interno soddisfa l'uguaglianza del parallelogramma:

$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x,y \in V$

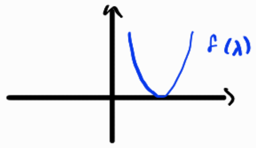
dim. (per V su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

I) osserviamo che la prop. di positività applicata al vettore: $\lambda x + y$ $\ x,y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ ci dà $\Rightarrow (\lambda x + y, \lambda x + y) \ge 0$

per la linearità: $0 \le (\lambda x, \lambda x + y) + (y, \lambda x + y) = (\lambda x, \lambda x) + (\lambda x, y) + (y, \lambda x) + (y,y) = \lambda^2 \|x\|^2 + \lambda (x,y) + \lambda (y,x) + \|y\|^2$

per la comutaz.: $0 \le \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda (x,y) + \|y\|^2$

la vediamo come parabola: $f(\lambda) = \lambda^2 \underbrace{\|x\|^2}_{a} + \lambda 2 \underbrace{(x,y)}_{b} + \underbrace{\|y\|^2}_{c} \ge 0$



$\Rightarrow \Delta = b^2 - ac \le 0 \Rightarrow b^2 \le ac$

$\Rightarrow (x,y)^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$

$\Rightarrow |(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$

II) $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$

1) è positiva o nulla perché abbiamo richiesto che $(x,y) \ge 0$ $\forall x \in V$ e $(x,x) = \emptyset \Leftrightarrow x = \emptyset$

quindi si ha anche che: $\|x\| = \emptyset \Leftrightarrow x = \emptyset$

2) omogeneità: $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \, \|x\|$

3) $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{2(x,y)}_{\ge \emptyset} \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)|$

per Cauchy-Schwarz $\Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x+y)| \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\uparrow$

$\{ |(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \}$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow$ vale la disuguaglianza triang.

III) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x,x) + \cancel{(x,y)} + \cancel{(y,x)} + (y,y) + (x,x) - \cancel{(x,y)} - \cancel{(y,x)} + (y,y)$

$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$\Rightarrow$ vale la legge del parallelogramma

• quindi ogni spazio pre-Hilbertiano è uno spazio vettoriale normato la cui norma proviene da $(\cdot,\cdot)$

↳ $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$

oss.

- la legge del parallelogramma è condizione necessaria
- si può dim. che l'uguaglianza del parallelogramma caratterizza gli spazi pre-Hilbert

teo. continuità del prod. scalare

sia V spazio vett. pre-Hilbert, allora $\Rightarrow$ il prod. scalare è continuo cioè:

$$y_n \to y \Rightarrow (x, y_n) \to (x, y) \quad (\text{I})$$

$$x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x, y) \quad (\text{II})$$

dim.

sono conseguenze di Cauchy-Schwarz

(I) $\underbrace{|(x, y_n) - (x, y)|}_{\text{di conseguenza} \to \emptyset} = |(x, y_n - y)| \leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to \emptyset}$ per $n \to +\infty$

cioè: $(x, y_n) \to (x, y)$

(II) $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)|$

$$= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \underset{\text{disuguaglianza triang. in } \mathbb{R}}{\leq} |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|$$

poiché $x_n \to x$ la succ. $\|x_n\|$ è lim. (cioè $\exists k > 0$ t.c. $\|x_n\| \leq k$)

quindi

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq \underbrace{\|x_n\|}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\text{infinitesimo}} + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to \emptyset \quad \text{per } n \to +\infty$$

def. vettori ortogonali: si dice che $x, y \in V$ (spazio vett. pre-Hilbertiano) sono ortogonali se $\Rightarrow (x, y) = \emptyset$ e si scrive: $x \perp y$

teo. di Pitagora

siano $x_1, \dots, x_n \in V$ t.c. $(x_i, x_j) = \emptyset$, $i \neq j$ (cioè x_i, x_j ortogonali)

allora $\Rightarrow$ $\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$

dim.

$$\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{k=1}^n x_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (x_j, x_k) = \sum_{j=1}^n (x_j, x_j) \Rightarrow \left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

x_j, x_k ortogonali $\Rightarrow (x_j, x_k) = \emptyset \quad \forall j \neq k$
$\Rightarrow$ sopravvivono solo i termini sulla diag.

def. complemento ortogonale: sia $S \subset V$ un sottoinsieme qualsiasi di vettori. Si dice complemento ortogonale di S, e si indica con $S^\perp$, l'insieme:

$$S^\perp = \{x \in V : (s,x) = \emptyset,\ \forall s \in S\}$$

teo.

$S^\perp$ è sottospazio vett. chiuso di V (questo è vero anche se S non è sottospazio)

spazi di Hilbert

def. si dice <u>spazio di Hilbert</u> uno spazio pre-Hilbertiano completo rispetto alla norma del prodotto scalare: $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$

teo. di Pitagora ∞ dimensionale

sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ dove H è uno spazio di Hilbert e siano $x_i \perp x_j$, $i \neq j$ t.c. $\sum_{j=1}^{+\infty} \|x_j\|^2 < +\infty$ (serie num. conv.)

allora $\Rightarrow$ A) $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ converge in H

B) $\|\sum_{j=1}^{+\infty} x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \|x_j\|^2$

oss.

esempi particolari di spazi di Hilbert sono L^2 e ℓ^2

il <u>teo. di rappresentaz. di Riesz</u> per gli spazi L^p si può dim. per tutti gli spazi di Hilbert

teo. di Riesz in H

sia H uno spazio di Hilbert. Sia H' il suo spazio duale cioè: $H' = \{T : H \to \mathbb{R} \text{ lin. e cont.}\}$

allora $\Rightarrow$ $\forall T \in H'$ $\exists!$ $y \in H$ t.c. $T_y(x) = (x,y)$ $\forall x \in H$

e si ha: $\|T_y\|_{H'} = \|y\|_H$ $\left(\|T_x\| = \sup_{x \in X} \frac{\|T_x\|_Y}{\|x\|_X} \text{ con } T : X \to Y \right)$

oss.

come capitava con $L^2(\Omega)$ il duale $(L^2)'$ si può identificare con L^2 nel senso che:

$\forall T \in (L^2)'$ $\exists!$ $g \in L^2$ t.c. $T(f) = \int_\Omega fg\,d\mu$ $\forall f \in L^2$

In modo analogo qualsiasi sia lo spazio di Hilbert H si ha che:

$\forall T \in H'$ $\exists!$ $y \in H$ t.c. $T(x) = (x,y)$ $\forall x \in H$

$\hookrightarrow$ cioè ogni funzionale lineare e continuo $T : H \to \mathbb{R}$ si rappresenta con un unico $y \in H$ tramite il prod. scalare: $T(x) = (x,y)$

$\left(|T(x)| = |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \right)$

analisi di Fourier in spazi di Hilbert

· generalizzare la nozione di ortogonalità in $\mathbb{R}^n$ agli spazi di Hilbert

def. sistema ortonormale: un insieme finito $\{e_j\}_{j=1}^n$ o infinito numerabile $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ di elementi in uno spazio di Hilbert H si dice sistema ortonormale se:

$$\Rightarrow (e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{(delta di Kronecker)}$$

oss.

i vettori hanno norma $(e_i, e_i) = \|e_i\|^2 = 1$ e sono t.c. $e_i \perp e_j$ se $i \neq j$

- dati $e_1, \dots, e_n$ vettori in H e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ si chiama combinazione lineare di $e_1, \dots, e_n$ il vettore $v := \sum_{j=1}^n c_j e_j$
- per il **teo. di Pitagora**, se $\{e_i\}$ sono sistema ortonormale, si ha: $\|\sum_{j=1}^n c_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^n |c_j e_j|^2 = \sum_{j=1}^n |c_j|^2$

quindi:

(I) i vettori e_j sono lin. indipendenti dato che:

$$\sum_{j=1}^n c_j e_j = \emptyset \Leftrightarrow c_j = \emptyset, \ \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{dato che } \sum |c_j|^2 = \emptyset \Leftrightarrow c_j = \emptyset \ \forall j)$$

(II) gli elementi $\{e_1, \dots, e_n\}$ generano un sottospazio vettoriale V_0 di H:

$$V_0 = \{v \in H ; \ v = \alpha e_1 + \dots + \alpha e_n, \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

(III) dati $\mu_1, \dots, \mu_n$ vett. lin. ind. è possibile partire da $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ e determinare una base ortonormale (tramite il procedimento di Gram-Schmidt) $\Rightarrow \{\mu_1, \dots, \mu_n\} \longrightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$

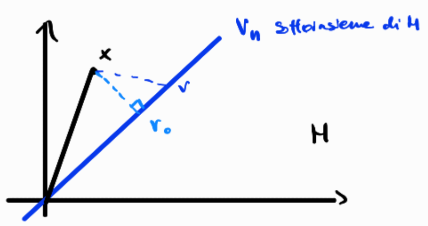
(IV) l'esistenza di sistemi ortonormali negli spazi di Hilbert si chiarifica bene con il teo. delle proiezioni

teo. delle proiezioni

sia H uno spazio di Hilbert e sia V_n un suo sottospazio vett. finito dimensionale, dotato di base ortonormale $\{e_j\}_{j=1}^n$
cioè $V_n = \{v \in H ; \ v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \dots, n\}$

allora $\Rightarrow \forall x \in H \ \exists! \ v_0 \in V_n$ di distanza minima da x cioè: $\|x - v_0\| = \min_{v \in V_n} \|x - v\|$

· si osserva che $x - v_0$ è ortogonale a V_n



- $x \in H$, $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V_n$ (al variare di $\alpha_1, \dots, \alpha_n$)
- $\|x - v\| = \text{distanza}(x, v)$
- $\|x - v_0\| = \min_{v \in V_n} \|x - v\|$

oss.

$$x - v_0 \perp V_n$$

def. l'elemento v_0 si dice proiezione di x su V_n e scriviamo $v_0 = P_{V_n}(x)$

si dimostra che:

$$v_0 = P_{V_n}(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

e vale:

$$\|v_0\|^2 \leq \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2$$

dim. 1) $x - v_0 \perp V_n$

poiché $v \in V_n$ t.c. $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ dobbiamo dim. che $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n$ si ha: $(x - v_0, v) = \emptyset$ da cui

$$(x - v_0, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = (x - v_0, \alpha_1 e_1) + \dots + (x - v_0, \alpha_n e_n) = \alpha_1 (x - v_0, e_1) + \dots + \alpha_n (x - v_0, e_n)$$

dunque se dim. che $(x - v_0, e_k) = \emptyset$ $\forall k = 1, \dots, n$ ho che $(x - v_0, v) = \emptyset$

siccome $v_0 = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$ quindi $(x - v_0, e_k) = (x - \sum (x, e_j) e_j, e_k) = (x, e_k) - \sum \underbrace{(x, e_j)}_{\text{(è uno scalare)}} (e_j, e_k)$

$= (x, e_k) - \sum (x, e_j) \delta_{jk} = (x, e_k) - \sum (x, e_k) = \emptyset$ $\forall k = 1, \dots, n$

quindi $(x - v_0, e_k) = \emptyset \Rightarrow (x - v_0, v) = (x - v_0, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = (x - v_0, \alpha_1 e_1) + \dots + (x - v_0, \alpha_n e_n) = \emptyset$

cioè $x - v_0 \perp v$

dim. 2) $\|v_0\|^2 \le \|x\|^2$

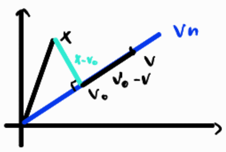
$x = x - v_0 + v_0$

sappiamo che $x - v_0 \perp v$ $\forall v \in V_n$

$v_0 \in V_n$, $x_0 - v_0 \perp V_n \Rightarrow$ vale il teo. di Pitagora: $\|x\|^2 = \underbrace{\|x - v_0\|^2}_{\ge \emptyset} + \|v_0\|^2 \ge \|v_0\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \ge \|v_0\|^2$

dim. 3) v_0 minimizza la distanza di x da V_n

$$x - v = \underbrace{x - v_0}_{\perp V_n} + \underbrace{v_0 - v}_{\in V_n}$$



$\Rightarrow$ quindi per il teo. di Pitagora: $\|x - v\|^2 = \|x - v_0\|^2 + \|v_0 - v\|^2 \ge \|x - v_0\|^2$

cioè $\|x - v_0\|^2 \le \|x - v\|^2$ $\forall v \in V_n$ $\Rightarrow \|x - v_0\| = \min_{v \in V_n} \|x - v\|$

dim. 4) unicità di v_0

<u>per assurdo</u> supponiamo che $\exists v_1 \ne v_2$ t.c. $\|v_i - x\| = d = \min_{v \in V_n} \|x - v\|$, $i = 1 \vee i = 2$

dalla legge del parallelogramma: $\|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2 [\|y\|^2 + \|z\|^2]$ $\quad y, z \in H$

trasformata di Fourier in L^1

consideriamo la serie di Fourier in forma complessa: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\omega x}$

dove:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\, e^{in\omega y}\, dy \qquad \omega := \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(sono i coeff. } \underline{\text{complessi}} \text{ della serie di Fourier)}$$

def. trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$: sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\Rightarrow$ definiamo $F(f) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i2\pi\xi y}\, dy$ $\quad (dy = dy_1 \cdot \ldots \cdot dy_n)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

dove: $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$\xi \cdot y := \sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j$

$\hookrightarrow$ la funzione $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è detta trasformata di Fourier della funzione f

oss.

per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la trasf. è ben def. Infatti $\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

$\hookrightarrow$ quindi $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ l'integrale converge

e.s. calc. la trasformata della funzione: $f(x) = e^{-|x|}$

osserviamo che $f \in L^1(\mathbb{R})$ infatti $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = [e^x]_{-\infty}^{0} + [-e^{-x}]_{0}^{+\infty} = (1-0) + (0-(-1)) = 2$

quindi:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \cdot e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{-\infty}^{0} e^{y(1-2\pi i \xi)} dy + \int_{0}^{\infty} e^{-y(1+2\pi i \xi)} dy = \left[\frac{e^{y(1-2\pi i \xi)}}{1-2\pi i \xi} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-y(1+2\pi i \xi)}}{1+2\pi i \xi} \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-2\pi i \xi} - \frac{1}{1+2\pi i \xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

quindi $\Rightarrow F(e^{-|x|}) = \hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$

OSS.

nelle applicazioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ o in part. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

per $n=1 \Rightarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cos(2\pi \xi y)\, dy - i \int_{\mathbb{R}} f(y) \sin(2\pi \xi y)\, dy$$

* se f pari : $f(-y) = f(y) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(y)\cos(2\pi\xi y)dy - \underbrace{\cancel{i\int_{\mathbb{R}} f(y)\sin(2\pi\xi y)\, dy}}_{\emptyset} = \int_{\mathbb{R}} f(y)\cos(2\pi\xi y)dy \Rightarrow \hat{f}(\xi)$ è pari e reale

$\hookrightarrow$ funz. pari $\cdot$ funz. dispari = funz. dispari integrata su dom. pari $= \emptyset$

* se f dispari: $f(-y) = -f(y) \Rightarrow \underbrace{\cancel{\int_{\mathbb{R}} f(y)\cos(2\pi\xi y)dy}}_{\emptyset} - i\int_{\mathbb{R}} f(y)\sin(2\pi\xi y)\, dy = -i\int_{\mathbb{R}} f(y)\sin(2\pi\xi y)dy \Rightarrow \hat{f}(\xi)$ è dispari e immaginaria pura

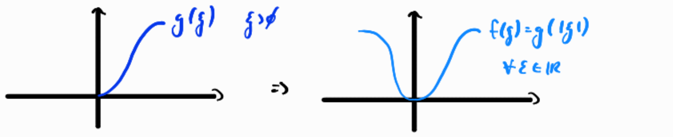
infatti : se f pari $\Rightarrow \hat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\cdot\cos(-2\pi\xi y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\cos(2\pi\xi y)dy = \hat{f}(\xi)$

se f dispari $\Rightarrow \hat{f}(-\xi) = -i\int_{\mathbb{R}} f(y)\sin(-2\pi\xi y)dy = +i\int_{\mathbb{R}} f(y)\sin(2\pi\xi y) = -\hat{f}(\xi)$

caso trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$ pari (o dispari)

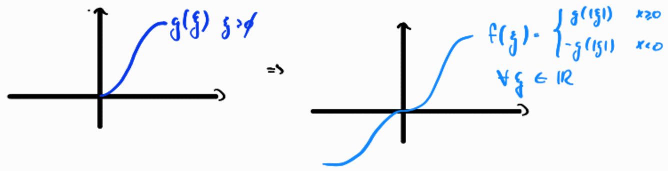
- nel caso sapessimo che $\hat{f}(\xi)$ è pari o dispari possiamo calc. l'integrale che def. $\hat{f}(\xi)$ solo per $\xi \geq \emptyset$ e poi specchiarlo simmetricamente consideriamo poi che:

(I) se $\hat{f}(\xi)=g(\xi)$ per $\xi>\emptyset$ e $\hat{f}$ pari $\Rightarrow$ $\hat{f}(\xi)=g(|\xi|)$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$



(II) se $\hat{f}(\xi)=g(\xi)$ per $\xi>\emptyset$ e $\hat{f}$ dispari $\Rightarrow$ $\hat{f}(\xi)=\operatorname{sgn}(x)\cdot g(|\xi|)$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$

dove $\operatorname{sgn}(x)=\frac{x}{|x|}$



teo. continuità $F: L^1\to C^0$

sia $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\Rightarrow$ $F: L^1(\mathbb{R}^n)\to C^0(\mathbb{R}^n)$ è un'operatore lineare e continuo

dim.

* linearità

$$F(\lambda f+\mu g)=\int_{\mathbb{R}^n}(\lambda f+\mu g)\,e^{-2\pi i\xi y}\,dy=\lambda\int_{\mathbb{R}^n}f e^{-2\pi i\xi y}dy+\mu\int_{\mathbb{R}^n}g e^{-2\pi i\xi y}dy=\lambda F(f)+\mu F(g)\quad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$$

* continuità

$$F(f)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)e^{-2\pi i\xi y}dy\Rightarrow|\hat{f}(\xi)|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)e^{-2\pi i\xi y}|\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,dy=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\Rightarrow\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n\\ f\in L^1(\mathbb{R}^n)}}\|F\|\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(per gli op. lin. vale il fatto che se è limitato è equivalente a dire che è continuo)

$\Rightarrow$ F è lin. e cont. cioè $\underline{F\in B(L^1,C^0)}$

teo. di Riemann-Lebesgue

$F: L^1\to C^0$ è t.c. $F(f)=\hat{f}(\xi)\to\emptyset$ per $|\xi|\to+\infty$ cioè è continua e nulla all'∞

* <u>punto cruciale 1:</u> si riesce a fare la trasformata di funzioni classicamente non derivabili, perchè <u>F trasforma l'operaz. di derivaz. in una operaz. di moltiplicaz.</u>

consideriamo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c. f' sia integrabile e $\int_{\mathbb{R}}f'(y)e^{-2\pi i\xi y}dy$ si possa integrare per parti

$$\left[\ \int u'v\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b uv'\,dx\right]$$

allora $\Rightarrow$
$$\int_{\mathbb{R}}f'(y)\,e^{-2\pi i\xi y}dy=\underbrace{\left[f(y)e^{-2\pi i\xi y}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{supponiamo che questo}\to\emptyset}+2\pi i\xi\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-2\pi i\xi y}dy}_{\hat{f}(\xi)}$$

quindi: $\int_{\mathbb{R}}f'(y)e^{-2\pi i\xi y}dy=2\pi i\xi\cdot\hat{f}(\xi)$ $\Rightarrow$ $\underline{F(f')=2\pi i\xi\cdot F(f)}$ cioè $\underline{F: D_x\to 2\pi i\xi}$

↳ F trasforma l'operatore di derivaz. D_x nell'operatore di moltiplicazione per $2\pi i\xi$

implicazioni sulle eq. diff.:

$u'+u=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $f\in L^1(\mathbb{R})$

$$F(u'+u)=F(f)=\hat{f}(\xi)\Rightarrow 2\pi i\xi\cdot\hat{u}(\xi)+\hat{u}(\xi)=\hat{f}(\xi)\Rightarrow\hat{u}(\xi)=\frac{1}{1+2\pi i\xi}\hat{f}(\xi)$$

$\Rightarrow$ quindi nell'ambito delle trasformate l'eq. diff. si risolve con una divisione

* punto cruciale 2:

ragioniamo sul fatto che la sol. è: $\hat{u}(\xi) = \underbrace{\frac{1}{1+2\pi i \xi}}_{\hat{g}(\xi)} \cdot \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$

$\Rightarrow$ quindi mi chiedo: dato che $\hat{u}(\xi) = F(u) = F(g) \cdot F(f) = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$, quale operaz. ⊛ mi consente di scrivere:

$\hookrightarrow F(u) = F(g * f)$ in modo che $u = F^{-1}(\hat{u}) = F^{-1}(\hat{f} \cdot \hat{g}) = f * g$

convoluzione in $\mathbb{R}^n$

def. convoluzione: sia $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Def. la convoluz. di f con g l'integrale: $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$

teo.

se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ l'integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$ è ben def. q.o. su $\mathbb{R}^n$ e $\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$
(cioè la convoluz. sta in L^1)

teo. della convoluz. per trasformate di Fourier

siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\Rightarrow F(f*g) = F(f) \cdot F(g)$

oss.

quindi il prodotto delle trasformate $F(f) \cdot F(g)$ proviene dalla trasf. della convoluz. di f e g

sotto opportune condiz. la sol. delle eq. diff. $F(u(x)) = F(g) \cdot F(f)$ diventa $\Rightarrow F(u) = F(g*f) \Rightarrow \quad u(x) = (f*g)(x)$

teo. derivata della trasf.

sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $x_j \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dove x_j è la j-esima componente di $x = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$

allora $\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ è derivabile rispetto a ξ_j e $\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\hat{f}(\xi)\right] = F\left(-2\pi i x_j f(x)\right)$

oss.

nel caso $n=1 \Rightarrow \hat{f}'(\xi) = F(-2\pi i x f(x))$

il teo. sotto ulteriori ipotesi si estende alle derivate successive: $f^{(k)}(\xi) = F((-2\pi i x)^k f(x))$

teo. trasf. della derivata

sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

allora $\Rightarrow F\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi) = 2\pi i \xi_j \cdot F(f)$

- anche questo teo. si estende alle derivate successive:

$F(\partial^\alpha f) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ dove α è un indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e ξ pure $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$\Rightarrow \partial^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \qquad \left(\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$

regolarità della trasformata

teo.

sia $|x|^k \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\quad \forall k \in 0, 1, \dots, m$

allora $\Rightarrow \hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$

- come conseguenza se $\forall k \Rightarrow |x|^k \cdot f \in L^1$ allora $\Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

teo.

sia $\eta \in \mathbb{R}^n$ fissato. Allora:

(I) $\mathcal{F}(f(x) \cdot e^{2\pi i x \eta}) = \hat{f}(\xi - \eta)$

(II) $\mathcal{F}(f(x+\eta)) = e^{2\pi i \xi \eta} \cdot \hat{f}(\xi)$

(III) $\mathcal{F}(f(\varepsilon x)) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ per $\varepsilon > 0$

e.s.

a) dim. per $\lambda>0$: $F(f(\lambda x))(\xi)=\frac{1}{\lambda}\hat{f}(\xi/\lambda)$

infatti:

$$F(f(\lambda x))=\int_{\mathbb{R}}f(\lambda x)\,e^{-2\pi i x\xi}dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}}f(y)\,e^{-2\pi i\frac{y}{\lambda}\xi}\frac{dy}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-2\pi i\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)y}dy=\frac{1}{\lambda}\hat{f}(\xi/\lambda)$$

$$\left[\begin{array}{c} y=\lambda x \\ \frac{dy}{dx}=\lambda \end{array}\right]$$

b) sapendo che: $F(e^{-|x|})=\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$ dim. che: $F(e^{-a|x|})=\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$, $a>\emptyset$

infatti:

$$f(x)=e^{-|x|}\Rightarrow f(ax)=e^{-|ax|}=e^{-a|x|}\quad \text{per } a>0$$

$$\Rightarrow F(f(ax))(\xi)=\frac{1}{a}\cdot\hat{f}(\xi/a)=\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{1+4\pi^2(\xi/a)^2}=\frac{1}{a}\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2/a^2}=\frac{1}{\cancel{a}}\frac{2a^{\cancel{2}}}{a^2+4\pi^2\xi^2}=\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2},\quad a>\emptyset$$

oss.

posto $f(x)=e^{-a|x|}$, $a>\emptyset$ possiamo verificare che:

* $f(x)$ è reale pari $\left(\text{infatti: } f(-x)=e^{-a|-x|}=f(x)\right)\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ è reale pari, infatti: $\hat{f}(\xi)=\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}\Rightarrow\hat{f}(-\xi)=\frac{2a}{a^2+4\pi^2(-\xi)^2}=f(\xi)$

* teo. di regolarità trasformata: se per $k\geq 1$ fissato, $x^\alpha f\in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\alpha\leq k$ allora $\Rightarrow \hat{f}\in C^k(\mathbb{R})$

(riesco a vedere la regolarità della trasformata senza calc. esplicitamente)

nel nostro esempio $f(x)=e^{-a|x|}$ quindi $\Rightarrow x^k e^{-a|x|}\in L^1(\mathbb{R})$ $\forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow\hat{f}\in C^\infty(\mathbb{R})$

e.s. trasformata della Gaussiana

$f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ allora $\Rightarrow \hat{f}(\xi)=\sqrt{\pi}\,e^{-\pi^2\xi^2}$

dim.

osserviamo che: $f'(x)=-2x\,e^{-x^2}=-2x f(x)$

$\Rightarrow F(f')=-2\,F(xf)$

$\Rightarrow 2\pi i\xi\,\hat{f}(\xi)=-2\,F(xf)$

ma $F((-2\pi i x)^k f)=\frac{d^k}{d\xi^k}F(f)$

per $k=1$: $F(-2\pi i x f)=-2\pi i\,F(xf)=\frac{dF(f)}{d\xi}\Rightarrow F(xf)=\frac{-1}{2\pi i}\cdot\frac{d\hat{f}}{d\xi}$

$$\Rightarrow 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{d\hat{f}}{d\xi}\Rightarrow \underbrace{\frac{d\hat{f}}{d\xi}=-2\pi^2\xi\hat{f}}_{\text{eq. diff.}}\Rightarrow\int\frac{1}{\hat{f}}d\hat{f}=-2\pi^2\int\xi d\xi\Rightarrow \ln|\hat{f}|=-\pi^2\xi^2+C_0$$

$\Rightarrow |\hat{f}|=e^{-\pi^2\xi^2}e^{C_0}\Rightarrow\hat{f}=\pm e^{C_0}\cdot e^{-\pi^2\xi^2}\Rightarrow\hat{f}=c\,e^{-\pi^2\xi^2}$ con $C\in\mathbb{R}$

inoltre: $F(f)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx\Rightarrow\hat{f}(0)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx$

$$I=\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx\Rightarrow I^2=\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2}dy\cdot\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^R e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho$$

$$\lim_{R\to\infty} 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho = 2\pi \cdot \frac{-1}{2}\left[e^{-\rho^2}\right]_0^R = \pi = I^2 \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

per cui: $\hat{f}(0) = I = \sqrt{\pi} = C \cdot e^{-\pi^2 \cdot 0^2} \Rightarrow C = \sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow \hat{f} = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\pi^2 \xi^2}$$

e.s. sapendo che: $F(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 \xi^2} = \hat{f}(\xi)$, calc. $F(e^{-ax^2})$, $a>0$

$$e^{-ax^2} = e^{-(\sqrt{a}x)^2} = f(\sqrt{a}x) \Rightarrow F(f(\sqrt{a}x)) = \frac{1}{\sqrt{a}} \hat{f}(\xi/\sqrt{a}) = \sqrt{\pi/a} \cdot e^{-\pi^2 \cdot \xi^2/a}$$

oss.

nel caso $\mathbb{R}^n$: $e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)^2} = e^{-x_1^2} \cdot \ldots \cdot e^{-x_n^2} \Rightarrow F(e^{-|x|^2}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} \cdot e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 \cdot \ldots \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} \cdot e^{-2\pi i x_n \xi_n} dx_n$

$$= \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi_1^2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi_n^2} = \pi^{n/2} \cdot e^{-\pi^2 |\xi|^2}$$

come illustrato con le eq. diff. è importante una volta risolta l'eq. diff. nell'ambito delle trasformate invertire la trasf. di Fourier

infatti se consideriamo l'eq. diff. ordinaria: $a_0 u^{(n)}(x) + \dots + a_n u(x) = f(x) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = F(a_0 u^{(n)} + \dots + a_n u)$

$\Rightarrow$ sotto l'ipotesi che $f \in L^1$ $\Rightarrow$ $\hat{f}(\xi) = a_0 (2\pi i \xi)^n \hat{u}(\xi) + \dots + a_n \hat{u}(\xi) = \underbrace{[a_0 (2\pi i \xi)^n + \dots + a_n]}_{P(\xi)} \hat{u}(\xi)$

(per cui la TdF è ben def.)

l'eventuale sol. è: $\hat{u}(\xi) = \dfrac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$ che dovrà essere invertita

teo. di inversione in L^1

sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\Rightarrow$ $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{+2\pi i x\xi} d\xi$ q.o. in $x \in \mathbb{R}^n$

corollario

se $f \in L^1$ e $\hat{f}(\xi) = 0 \Rightarrow f(x) = \emptyset$ q.o. (infatti: se $\hat{f}(\xi) = \emptyset \Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot e^{+2\pi i x\xi} d\xi = \emptyset$ q.o.)

quindi si ha che: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi) = \emptyset$ cioè $\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ allora $\Rightarrow$ $f(x) = g(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^n$

e.s.

det. le sol. in $L^1(\mathbb{R})$ dell'eq. diff. $u'' - u = f$ dove assumiamo che $\begin{cases} f \in L^1(\mathbb{R}) \\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$

passo alla trasformata di Fourier: $(2\pi i \xi)^2 \hat{u} - \hat{u} = \hat{f} \Rightarrow \hat{u} = \dfrac{-\hat{f}}{1 + 4\pi^2 \xi^2}$

osserviamo che $\|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}| d\xi = \int_{\mathbb{R}} \dfrac{|\hat{f}|}{1 + 4\pi^2 \xi^2} d\xi \le \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}| d\xi = \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Inoltre $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{-1}{1+4\pi^2\xi^2}\right| d\xi \underset{\substack{2\pi\xi = y \\ \frac{dy}{d\xi} = 2\pi}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan(y)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\left[\pi/2 - (-\pi/2)\right] < \infty \Rightarrow \frac{-1}{1+4\pi^2\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$

poniamo ora: $\hat{g}(\xi) := \dfrac{-1}{1 + 4\pi^2 \xi^2} \Rightarrow g(\xi) = -\dfrac{e^{-|x|}}{2}$ $(\in L^1(\mathbb{R}))$ allora $\Rightarrow$ $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) = F(g) \cdot F(f) = F(g * f)$

con $\hat{f}, \hat{g}, f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow F(u) = F\left(-\dfrac{e^{-|x|}}{2} * f\right) \in L^1(\mathbb{R})$

ma $u = g * f \in L^1(\mathbb{R})$ perchè $\|u\|_{L_1} = \|g * f\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1}$ (teo)

quindi $\Rightarrow$ $u(x) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} f(y)\, dy$ è la sol. in L^1

oss.

$u'' - u = f$

se fossimo nel caso classico $f \in C^0$ l'int. gen. dato da $z'' - z = 0 \Rightarrow \rho^2 - 1 = \emptyset \Rightarrow \rho = \pm 1 \Rightarrow z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ (integrale gen. dell'omogenea associata)

$\Rightarrow u(x) = z(x) + \underbrace{v_f(x)}_{\text{sol. part. dell'integrale completo}}$

osserviamo che la trasf. di Fourier sta cercando sol. in $L^1(\mathbb{R})$ se $f, \hat{f} \in L^1$ quindi fissa le cost. $c_1 = c_2 = \emptyset$

perchè $\int_{\mathbb{R}} |e^x| = +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}} |e^{-x}|\, dx = +\infty$

cioè la trasformata mi fissa cei le costanti in modo tale da farmi finire le sol. in un det. spazio

$\Rightarrow$ quindi $v_f(x) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} f(y)\, dy$ è l'int. particolare dell'eq. completa

trasformata di Fourier in L^2

def. spazio di Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$: lo spazio di Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ delle funz. a decrescenza rapida è def. come segue:

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(o\ \mathbb{C})\ ;\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e } \forall k \geq 0 \text{ e } \forall \alpha \text{ multiindice} \Rightarrow \lim_{|x| \to +\infty} |x|^k \cdot D^\alpha[f(x)] = \emptyset \right\}$$

oss. nel caso $n=1$ il multiindice si riduce ad un indice. Questo vuol dire che le derivate $f^{(\alpha)}(x)$, $\alpha = 0, 1, \dots,$ sono t.c. $\lim_{|x| \to +\infty} |x|^k f^{(\alpha)}(x) = \emptyset$

cioè la funzione e tutte le sue derivate vanno a zero all'infinito più velocemente di qualsiasi potenza k di $|x|$

e.s.

$$f(x) = e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n) \quad \text{cioè } \lim_{|x| \to +\infty} |x|^k D^\alpha[e^{-|x|^2}] = \emptyset \quad \forall \alpha, k$$

oss. $S(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale ma NON è normato

teo. densità di $S(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $p \in [1, +\infty)$

lo spazio $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [1, +\infty)$ cioè:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ p \in [1, \infty) \quad \exists \{f_n\} \subset S(\mathbb{R}^n) \text{ t.c. } \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to \emptyset \quad \text{per } n \to +\infty$$

proposizione

se $f \in S(\mathbb{R}^n)$ allora:

* $D^\beta[f] \in S(\mathbb{R}^n)$ $\forall \beta$ multiindice
* $x^\beta f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\forall \beta$ multiindice

proprietà cruciali della trasformata su $S(\mathbb{R}^n)$:

teo. trasformata di Fourier su $S(\mathbb{R}^n)$

I) $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ si ha che: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \in S(\mathbb{R}^n)$

e vale la formula di inversione: $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$

II) $\forall f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ si ha: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)^* dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)^* d\xi$

III) $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ risulta $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

- cioè $\|F(f)\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ è una isometria
- la trasf. F su L^2 non cambia la norma di f

oss.

- il fatto che $F: S \to S$ e $F^{-1}: S \to S$ conserva la norma L^2
- S è denso in L^2 $\Rightarrow$ consente di def. per densità la trasf. di F su L^2

teo. indipendenza successione approssimante

sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $\{f_k\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\|f_k - f\|_{L^2} \to \emptyset$ per $k \to \infty$

allora $\Rightarrow$ la successione $\{\hat{f}_k(\xi)\}$ converge ad una funzione che appartiene a L^2 e tale funzione non dipende dalla particolare successione approssimante cioè, dato $f \in L^2$ posso approssimare $f \in L^2$ con diverse successioni di S

$$g_k \to f \text{ in } L^2, \quad h_k \to f \text{ in } L^2$$

le funzioni $\{\hat{g}_k(\xi)\}$, $\{\hat{h}_k(\xi)\}$ convergono ad una stessa funzione $\hat{f}(\xi)$ in L^2

$$\hat{g}_k \to \hat{f}, \quad \hat{h}_k \to \hat{f} \quad \text{in } L^2$$

def. trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_k\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to \emptyset$, $k \to \infty$

allora $\Rightarrow$ si def. $\hat{f}$ il lim. in $L^2(\mathbb{R}^n)$ di $\{\hat{f}_k\} \subset S(\mathbb{R}^n)$

<u>ricapitolando:</u>

1) si def. uno spazio di funz. $(S(\mathbb{R}^n))$ per le quali la trasf. di Fourier ha buone prop.

2) si osserva che $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$

3) per densità si def. la trasf. in L^2

- le prop. della trasf. di Fourier sono più naturali rispetto che in L^1

teo. proprietà trasf. di Fourier in L^2

A) l'operatore lineare $F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ è lin. e cont. e soddisfa l'identità

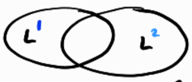
i) $\|Ff\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^2$ (preserva la norma)

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(x)^* \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)^* \, d\xi \quad \forall f, g \in L^2$ (preserva il prod. scalare) $\left[(f,g)_{L^2} = \int f \bar{g} \right]$

$\Rightarrow (f,g)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2}$

- cioè $F : L^2 \to L^2$ è una isometria tra spazi di Hilbert
- F è una corrispondenza biunivoca tra $L^2 \to L^2$ che conserva norma e prod. scalare

B) vale la formula di inversione : $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i \xi x} \, d\xi = \underline{F(\hat{f}(\xi))(-x)} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

C) in gen. su $\mathbb{R}^n$ si ha che 

ma se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ si ha che $\hat{f}(\xi)$ def. in L^1 è uguale a $\hat{f}(\xi)$ def. su L^2

D) nel caso di L^1 si ha che $F : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty^0(\mathbb{R}^n)$ dove $C_\infty^0(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^0 \text{ t.c. } \lim_{|x| \to \infty} f = \emptyset \}$ cioè la trasf. porta fuori da L^1
<u>non</u> mappa L^1 in se

proposizione metodo iterativo

sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $\{f_k\}$ una qualsiasi successione

$$f_k \in L^2 \cap L^1 \quad \text{t.c.} \quad f_k \to f \text{ in } L^2$$

allora $\Rightarrow \hat{f}_k \to \hat{f}$ in L^2

in particolare: $\int_{|x| \le k} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi} \, dx \to \hat{f}(\xi)$ in L^2

e.s.

calc. la trasf. di Fourier di $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

osserviamo che $f\in L^2(\mathbb{R})$ ma $f\notin L^1(\mathbb{R})$ infatti:

$$\|f\|_{L^2}^2=\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|^2dx=\int_{\mathbb{R}}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \le 2\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\,[\arctan]_0^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\emptyset\right)=\pi<+\infty \Rightarrow f\in L^2$$

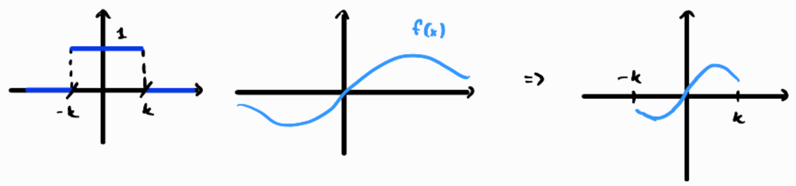
tuttavia

$$\|f\|_{L^1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

ma per $x\to\infty$ $\frac{|x|}{1+x^2}\sim\frac{1}{x}$ che non è integrabile ($\ln x\to\infty$ per $x\to\infty$) $\Rightarrow f\notin L^1$

la trasformata si calcola allora come $\hat f(\xi)=\lim_{k\to+\infty}\int_{|x|\le k}\frac{x}{1+x^2}e^{-2\pi i\xi x}\,dx$

che si può scrivere anche con l'utilizzo delle funz. caratteristiche: $f_k(x)=f(x)\cdot\chi_{\{|x|<k\}}(x)$



l'integrale che dà $\hat f(\xi)$ è:

$$\hat f(\xi)=\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{x}{1+x^2}\cdot e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \begin{cases}-\pi i e^{-2\pi\xi}, & \xi>\emptyset\\ \pi i e^{2\pi\xi}, & \xi<\emptyset\end{cases}$$

teo. dei residui

oss.

$f\in L^2$ ma $f\notin L^1$ quindi $\Rightarrow$ $\hat f(\xi)$ non è necessariamente continua

applicazione trasf. di Fourier in L^2: eq. di Schrödinger per la particella libera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\text{particella libera} \Rightarrow V=\emptyset)$$

$$\Rightarrow i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar}{2m}\cdot\underbrace{\Delta\psi}_{\text{laplaciano}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar}{2m}\cdot\Delta\psi & \Delta=\partial_{xx}^2+\partial_{yy}^2+\partial_{zz}^2 \\ \psi(0,x)=\psi_0(x) & (\text{dato iniziale}) \quad \text{con } \psi_0\in L^2(\mathbb{R}^3)\end{cases}$$

$$\hat\psi(t,\xi)=\int_{\mathbb{R}^3}\psi(t,x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx$$

$$F(\Delta f)=F(\partial_{xx}^2 f+\partial_{yy}^2 f+\partial_{zz}^2 f) = (2\pi i\xi_1)^2\hat f+(2\pi i\xi_2)^2\hat f+(2\pi i\xi_3)^2\hat f = -4\pi^2|\xi|^2\cdot\hat f$$

$$\Rightarrow i\frac{\partial\hat\psi}{\partial t}=\frac{-\hbar}{2m}\cdot(-4\pi^2|\xi|^2\hat\psi) \underset{\text{separaz. var.}}{\Rightarrow} \int\frac{1}{\hat\psi}\,d\hat\psi=\int\frac{2\pi^2}{im}\hbar|\xi|^2\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|\hat\psi(t,\xi)| = \frac{2\pi}{im}\hbar|\xi|^2 t + C(\xi)$$

C è cost. rispetto l'integraz. in dt, ma potrebbe dipendere da ξ

$$\begin{cases}\hat\psi(t,\xi)=C(\xi)e^{-\frac{2\pi^2}{m}\hbar i|\xi|^2 t}\\ \hat\psi(0,\xi)=\hat\psi_0(\xi)\end{cases} \Rightarrow \hat\psi(0,\xi)=C(\xi)=\hat\psi_0(\xi)$$

$\hookrightarrow \hat{\psi}(t,\xi) = \hat{\psi}_0(\xi)\, e^{-\frac{2\pi^2}{m}\hbar i t |\xi|^2}$ (è simile al caso della eq. del calore, solo che invece di scrivere il dato iniziale come serie di Fourier e guardare i coeff. a_k, b_k, qui guardo la trasf. di Fourier del dato iniziale)

osserviamo ora che $|\hat{\psi}(t,\xi)| = |\hat{\psi}_0(\xi)|$

quindi $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}(t,\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}_0(\xi)|^2 d\xi$ ma essendo $F: L^2 \to L^2$ una isometria

$\Rightarrow \|F\psi\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$

per cui $$\|\psi(t,x)\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(t,x)|^2 dx \overset{\text{isometria}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}(t,\xi)|^2 d\xi \underset{|\hat{\psi}(t,\xi)| = |\hat{\psi}_0(\xi)|}{=} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}_0(\xi)|^2 d\xi \overset{\text{isometria}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_0(\xi)|^2 d\xi$$

$$\hookrightarrow \|\psi(t,x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\psi_0(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

vediamo che se il dato è in L^2 con norma $\|\psi_0\|_{L^2} = 1$ (prob. di trovare la particella su $\mathbb{R}^3 \equiv 1$)

- durante l'evoluz. $\psi = \psi(t,x)$ la prob. si mantiene $\equiv 1 \quad \forall t > 0$
- questo fatto dipende dalla presenza dell'unità immaginaria nell'eq. di Schrödinger
- questo non capita con l'eq. del calore $\partial_t u = k\Delta u$

Trasformata di Laplace

: il problema che vogliamo trattare è un problema di Cauchy

e.s.

$$\begin{cases} u'(t)+u(t) = f(t) \\ u(0^+) = u_0 \end{cases} \qquad (t>\emptyset)$$

e per esempio $f(t) = \sin t, t^n, e^t$ come posso cambiare la trasf. di Fourier in modo tale che:

I) funzioni come $\sin t, t^n, e^t \notin L^1(0,\infty)$ siano trasformabili

II) la trasformata della derivata tenga conto del dato iniziale

OSS.

- poiché stiamo studiando problemi per $t \geq \emptyset$, la trasformata sarà def. integrando su $[0,\infty]$ e non su tutto $\mathbb{R}$

- l'exp. $e^{i\xi x}$ che nel caso della trasformata di Fourier è un termine oscillante deve essere modificato, aggiungendo una parte reale $<\emptyset$ che aiuti la convergenza anche quando la funzione da trasformare $\notin L^1(0,\infty)$

$e^{i\xi x} \longrightarrow e^{-sx}$ dove $s = \sigma + i\omega$ $\quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}$ $\quad , s \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow e^{-\sigma} \cdot e^{-i\omega x}$

smorza le oscillazioni; globalmente aiuta la convergenza dell'integrale

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt} \quad , \quad s = \sigma + i\omega$$

OSS.

- $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ se $s = \sigma + i\omega$ con $\sigma > \emptyset$ è convergente anche con $f(t) = \sin t, t^n$

- se considero la trasformata della derivata di $u(t)$ per $t > \emptyset$

$$\mathcal{L}(u') = \int_0^{+\infty} u'(t)e^{-st}dt \underset{\text{integro per parti}}{=} \left[u(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} + \underbrace{s\int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}dt}_{s\cdot\mathcal{L}(u)} = \lim_{t\to\infty} u(t)e^{-st} - u(0^+) + s\mathcal{L}(u)$$

sotto la condiz. che $u(t)e^{-st} \longrightarrow \emptyset$ per $t \to \emptyset$ allora $\Rightarrow \mathcal{L}(u') = s\mathcal{L}(u) - u(0^+)$

la parte reale $\sigma < \emptyset$ aiuta la convergenza

OSS.

- se avessi usato la trasf. di Fourier, integrando per parti troverei il termine:

$\left[u(t)e^{-2\pi i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty}$ e non riuscirei mai ad infilarci dentro il dato iniziale per $t = \emptyset$

- con la trasf. di Fourier $u(t)$ deve controllare la convergenza del termine oscillante, invece e^{-st} nella trasf. di Laplace aiuta la convergenza

def. funzione $\mathcal{L}$ trasformabile: sia $f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile e Lebesgue integrabile su ogni intervallo limitato $[0,k]$ per $k > \emptyset$ (f localmente integrabile)

si dice che f è Laplace trasformabile (o $\mathcal{L}$ trasformabile) se $\exists s_0 \in \mathbb{C}$ t.c.: $e^{-s_0 t} \cdot f \in L^1(0,+\infty)$
cioè t.c. l'integrale di Lebesgue: $\mathcal{L}(f)(s_0) := \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\,dt$ converga assolutamente

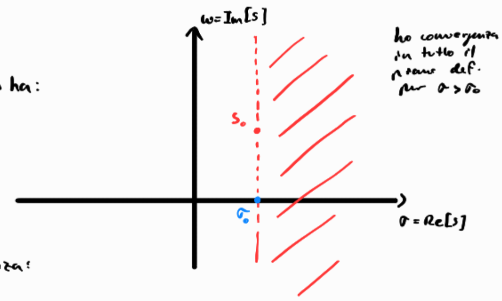
oss.

dato che abbiamo assunto $s = \sigma + i\omega$, $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)\, e^{-s_0 t}| = |f(t)| \cdot |e^{-\sigma_0 t}| \cdot |e^{-i\omega t}| = |f(t)| \cdot e^{-\sigma t} \quad \forall \omega$$

quindi se $\exists s_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $e^{-s_0 t} \cdot f \in L^1(0,\infty)$ allora $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{C}$ t.c. $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{R}(s_0)$ si ha:

$$|e^{-st} \cdot f(t)| = e^{-\sigma t} \cdot |f(t)| \leq e^{-\sigma_0 t} \cdot |f(t)| \in L^1(0,\infty)$$



def. ascissa di convergenza: se $f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è $\mathcal{L}$-trasformabile definiamo ascissa di convergenza:

$$\sigma(f) := \inf \left\{ s \in \mathbb{R} \text{ t.c. } e^{-st} f \in L^1(0,\infty) \right\}$$

indichiamo con Π_f il semipiano di convergenza cioè:

$$\Pi_f = \left\{ s \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \mathrm{Re}[s] > \sigma(f) \right\}$$

• potrebbe anche risultare che $\sigma(f) = -\infty$. In tal caso, Π_f è tutto $\mathbb{C}$

def. trasformata di Laplace di f: se $f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è $\mathcal{L}$-trasformabile si dice trasformata di Laplace la funzione:

$$\mathcal{L}(f): \Pi_f \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

oss.

• la trasf. di Laplace è una funz. della var. complessa $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$
(la trasf. di Fourier è a var. reale $\xi \in \mathbb{R}$)

var. reale $\Rightarrow$ non può essere analitica, al più analitica reale

• trasf. di Fourier spazio $\longrightarrow$ spazio ($F(f): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$)
trasf. di Laplace funz. localmente int. $\longrightarrow$ funz. analitiche ($\mathcal{L}(f): \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$)

• l'ascissa di convergenza $\sigma(f) = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \text{ t.c. } e^{-\sigma t} \cdot f \in L^1(0,\infty) \right\}$ garantisce che per i punti $s = \sigma(f) + i\omega \in \mathbb{C}$ l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ è convergente in:

$$\Pi_f = \left\{ s \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \mathrm{Re}[s] > \sigma(f) \right\}$$

perché: $|e^{-st} \cdot f(t)| = e^{-\mathrm{Re}[s]t} \cdot |f(t)| \leq e^{-\sigma(f)t} \cdot |f(t)|$

- nel caso $Re[s] = \sigma(f)$ la trasf. può esistere, o non esistere (dipende dai casi), ma sicuramente non esiste per $Re[s] < \sigma(f)$

def. segnale: chiamiamo segnale una funz. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($o\ \mathbb{C}$) t.c. $g(t) \equiv 0, \forall t<0$

oss.

ogni volta che calc. la trasf. di Laplace di una funz. sottointendiamo che $g(t) = 0$ per $t<0$

quindi data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($o\ \mathbb{C}$) consideriamo la funz. di Heaviside:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

↳ calcoleremo la trasformata di Laplace di $g(t) = f(t)H(t)$

proposizione linearità della $\mathcal{L}$-trasf.

la trasf. di Laplace è un operatore lineare: siano f, g $\mathcal{L}$ trasformabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

allora $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}f + \beta \mathcal{L}g$

con ascissa di convergenza $\sigma_0 = \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$

es. 1

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s} \quad \text{con } \sigma(H) = 0, \ Re[s] > 0$$

infatti

$$\mathcal{L}(H) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } Re[s]>0 \Rightarrow \sigma(H)=0}}{=} -\frac{1}{s} \cdot [-1] = \frac{1}{s}$$

es. 2

$$\mathcal{L}(H(t)e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad a \in \mathbb{C} \quad \text{per } Re[s] > Re[a]$$

infatti

$$\mathcal{L}(H(t)e^{at}) = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

per $Re[a-s] < 0$

$\Rightarrow Re[a] < Re[s]$

$\Rightarrow \sigma(He^{at}) = Re[a]$

es. 3

$$\mathcal{L}(H(t)\cos(\omega t)) = \mathcal{L}\left(H(t) \cdot \left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t) \cdot e^{i\omega t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t)e^{-i\omega t})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+i\omega} \qquad \text{con } \sigma(H\cos(\omega t)) = 0$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{s+\cancel{i\omega} + s-\cancel{i\omega}}{(s-i\omega)(s+i\omega)}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

e.s. 4

$$\mathcal{L}(H(t)\sin(\omega t)) = \mathcal{L}\left(H(t)\cdot\left[\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right]\right) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}(H(t)e^{i\omega t}) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}(H(t)e^{-i\omega t})$$

$$\underset{\mathrm{Re}[s]>0}{=} \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{s+i\omega} = \frac{1}{2i}\left[\frac{\cancel{s}+i\omega-\cancel{s}+i\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{con } \sigma(H\sin(\omega t)) = 0$$

e.s. 5

$$\mathcal{L}(H(t)t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n\in\mathbb{N},\ \mathrm{Re}[s]>0$$

infatti

$$\mathcal{L}(H(t)\cdot t) = \int_0^{+\infty} t e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\left[te^{-st}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-st}\,dt \underset{\mathrm{Re}[s]>0}{=} 0 - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}$$

per iterazione:

$$\mathcal{L}(H(t)\cdot t^n) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\left[t^n e^{-st}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\cdot e^{-st}\,dt \underset{\mathrm{Re}[s]>0}{=} \frac{n}{s}\mathcal{L}(H(t)t^{n-1})$$

$$\mathcal{L}(H(t)t^{n-1}) = \frac{(n-1)}{s}\cdot\mathcal{L}(H(t)t^{n-2})$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(H(t)\cdot t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{con } \sigma(Ht^n) = 0$$

proposizione

sia $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ o $(\mathbb{C})$ misurabile

allora $\Rightarrow$ f è $\mathcal{L}$-trasformabile se vale la stima: $|f(t)| \le ce^{\alpha t},\ \forall t\in(0,+\infty)$

dove $c>0$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ fissato

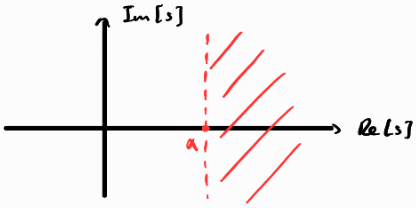
dim.

segue dal fatto che per def.: $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

e quindi

$$|\mathcal{L}(f)| \le \int_0^{+\infty} |f(t)|\cdot|e^{-st}|\cdot dt \le \int_0^{+\infty} c\cdot e^{\alpha t}\cdot e^{-\mathrm{Re}[s]t}\,dt = c\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-\mathrm{Re}[s])t}\,dt$$

che converge per $\alpha - \mathrm{Re}[s] < 0 \Rightarrow \alpha < \mathrm{Re}[s]$



relazione con la trasformata di Fourier

avendo assunto $s=\sigma+i\omega$, $\sigma>\sigma_f$ si ha

$$(\mathcal{L}f)(s)=(\mathcal{L}f)(\sigma+i\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}\cdot e^{-i\omega t}\,dt=F\left(f(t)e^{-\sigma t}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

conseguenza dell'iniettività della trasf. di Fourier:

teo. iniettività della trasf. di Laplace

sia f $\mathcal{L}$-trasf. e t.c. $\mathcal{L}(f)(s)\equiv\emptyset$ (più precisamente basta che $(\mathcal{L}f)(\sigma+i\omega)=\emptyset$ $\forall\omega\in\mathbb{R},\ \sigma>\sigma(f)$)

allora $\Rightarrow f(t)\equiv\emptyset$ q.o. in $t>\emptyset$

oss.

di conseguenza, se f,g son $\mathcal{L}$-trasf, e $\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(g)$

allora $\Rightarrow f(t)=g(t)$ q.o. per $t>\emptyset$

- dalla relaz. con la trasf. di Fourier si può identificare la formula di inversione della trasf. di Laplace.

teo. limitatezza della trasformata

sia f una funz. $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow$ fissato $s_0>\sigma_f$ $\exists c>\emptyset$ t.c. $|(\mathcal{L}f)(s)|\le c$ $\forall \operatorname{Re}[s]>s_0$

dim.

$$|(\mathcal{L}f)(s)|\le\int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}[s]t}\cdot|f|\,dt\le\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t}\cdot|f(t)|\,dt=c<+\infty$$

teo. comportamento all'∞

sia f $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow \lim\limits_{\operatorname{Re}[s]\to\infty}(\mathcal{L}f)(s)=\emptyset$

dim.

per $t>\emptyset$ e $\operatorname{Re}[s]>s_0>\sigma(f)$

si ha che $\Rightarrow |e^{-st}\cdot f(t)|\le e^{-\operatorname{Re}[s]t}\cdot|f(t)|\longrightarrow\emptyset$ per $\operatorname{Re}[s]\longrightarrow+\infty$

e poi $\Rightarrow |e^{-st}\cdot f(t)|\le e^{-\operatorname{Re}[s]t}\cdot|f(t)|\le e^{-s_0 t}\cdot|f(t)|\in L^1$

cioè la funz. $e^{-(\sigma+i\omega)t}\cdot f(t)$ in modulo è dominata da una funz. in L^1 che non dipende da $\sigma+i\omega$

quindi per il teorema convergenza dominata di Lebesgue si ha:

$$\Rightarrow \lim_{\operatorname{Re}[s]\to+\infty}|(\mathcal{L}f)(s)|\le\lim_{\operatorname{Re}[s]\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}[s]t}\cdot|f(t)|\,dt\underset{\uparrow}{=}\int_0^{+\infty}\lim_{\operatorname{Re}[s]\to+\infty} e^{-\operatorname{Re}[s]t}\cdot|f(t)|\,dt=\emptyset$$

(teo. Lebesgue)

teo. (esistenza di ∞ derivate di $\mathcal{L}f$)

sia f $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow$ $(\mathcal{L}f)(s)$ è derivabile ∞ volte (in senso complesso) nel semipiano di convergenza e si ha:

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}(-tf)(s)$$

in generale:

$$\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}f)(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f)(s)$$

oss.

la dim. è basata sul fatto di rendere rigoroso il seguente passaggio:

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{L}f)(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot f(t)\,dt \overset{*}{=} \int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty}(-t)e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}[-t f(t)]\,dt = \mathcal{L}(-t f(t))$$

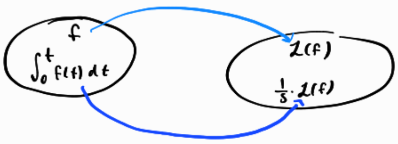
teo. derivata della primitiva

sia f $\mathcal{L}$-trasf e sia $g(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ $\Rightarrow$ convoluzione di 1 e f $\rightarrow$ è un caso particolare della trasformata della convoluzione (tenendo conto del fatto che sto integrando segnali)

allora $\Rightarrow$ g è $\mathcal{L}$-trasf. e $(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s}\cdot(\mathcal{L}f)(s)$ $\forall s \in \mathbb{C}$ t.c. $Re[s] > \max\{0, \sigma(f)\}$

oss.

la trasf. di Laplace trasforma l'operaz. di integraz. in una moltiplicaz. per $1/s$



teo. trasf. della derivata

sia $f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ con f continua in $[0,+\infty)$, derivabile (o regolare a tratti) in $(0,+\infty)$ e sia f $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow$ f' è $\mathcal{L}$-trasf. e si ha $(\mathcal{L}f')(s) = s\mathcal{L}(f) - f(0^+)$ $\forall s \in \mathbb{C}$ t.c. $Re[s] > \max(0, \sigma(f))$

oss.

anche nell'ambito delle trasf. di Laplace $D_t \longrightarrow$ moltiplicaz. per s (anche la trasf. di Fourier faceva diventare la derivazione) in più c'è $f(0^+)$ che consente di studiare le eq. diff. con dato di Cauchy

teo. trasf. derivate di ordine superiore

sia $f \in C^{n-1}([0,+\infty])$ con $f^{(n-1)}$ regolare a tratti e sia $f^{(n)}$ $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow$ $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sono $\mathcal{L}$-trasf. e valgono:

$\mathcal{L}f' = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0^+)$

$\mathcal{L}f'' = s^2(\mathcal{L}f)(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$

$\mathcal{L}(f''') = s^3(\mathcal{L}f)(s) - s^2 f(0^+) - s f'(0^+) - f''(0^+)$

$\vdots$

$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - s^{(n-1)}f(0^+) - s^{(n-2)} \cdot f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$

dove $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}[s] > \max(0, \sigma(f^{(n)}))$

se $f(t+T) = f(t)$ (f <u>periodica</u>)

allora $\Rightarrow \mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt$

se f,g segnali $\Rightarrow$ $(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
$\forall t > 0$ se $f,g \in L^1(0,k)$ $\forall k > \emptyset$ l'integrale converge, l'ipotesi è verificata se f,g sono $\mathcal{L}$-trasformabili

teo. trasf. della convoluz.

se f,g sono segnali $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow$ $f*g$ è $\mathcal{L}$ trasf, $\sigma(f*g) = \max(\sigma(f), \sigma(g))$ e vale: $\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}g)(s)$

$\forall s \in \mathbb{C}$ t.c. $\operatorname{Re}[s] > \sigma(f*g)$

teo. shift della trasformata

sia f $\mathcal{L}$-trasformabile

allora $\Rightarrow$ $\forall a \in \mathbb{C}$ la funzione $e^{at} \cdot f(t)$ è $\mathcal{L}$-trasf., $\forall s \in \mathbb{C}$ t.c. $\operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[a] + \sigma(f)$
e si ha $\mathcal{L}(e^{at} \cdot f(t)) = (\mathcal{L}f)(s-a)$

oss.

$\mathcal{L}(H(t)) = 1/s \qquad \operatorname{Re}[s] > \emptyset$

$\hookrightarrow \mathcal{L}(e^{at} \cdot H(t)) = \frac{1}{s-a}$

inoltre sappiamo che $\mathcal{L}(t^n \cdot H(t)) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(e^{at} \cdot t^n \cdot H(t)) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[a]$

teo. shift della funzione

sia f $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow$ $\forall t_0 > t$ la funzione $f(t-t_0)$ segnale $(f(t-t_0) \cdot H(t-t_0))$ è $\mathcal{L}$-trasf. con la stessa ascissa di convergenza di f $(\sigma(f(t)) = \sigma(f(t-t_0)))$ e:

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0)) = e^{-t_0 s}(\mathcal{L}f)(s) \qquad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}[s] > \sigma(f)$$

e.s. 1

$\mathcal{L}(H) = \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re}(s) > \emptyset$

$\mathcal{L}(H(t-t_0)) = \frac{1}{s} \cdot e^{-t_0 s}$

e.s. 2

$\mathcal{L}(\sin(\omega(t-t_0)) \cdot H(t-t_0))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \cdot e^{-t_0 s}$, $\omega > \emptyset$, $t_0 > \emptyset$, $\operatorname{Re}[s] > \emptyset$

$\mathcal{L}((t-t_0)^n \cdot H(t-t_0))(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} e^{-t_0 s}$, $\operatorname{Re}[s] > \emptyset$, $n = 1, 2, \dots,$

teo.

sia f $\mathcal{L}$-trasf.

allora $\Rightarrow$ $\forall c > 0$, $f(ct)$ è $\mathcal{L}$-trasf. e vale:

$$\mathcal{L}\big(f(ct)\big)(s) = \frac{1}{c}\,\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{c}\right) \quad Re[s] > \sigma(f)$$

e.s.

$$\begin{cases} u'' + u = 1 & t > 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -2 \end{cases}$$

poniamo $y(s) := \mathcal{L}(u)$

$$\Rightarrow \quad s^2 y - s\,u(0) - u'(0) + y = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 y - s + 2 + y = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad y(s^2+1) - s + 2 = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\frac{1}{s} + s - 2}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} \cdot \left(\frac{s^2 - 2s + 1}{s}\right) = \frac{(1+s^2) - 2s}{s(1+s^2)} = \frac{\cancel{1+s^2}}{s(\cancel{1+s^2})} - \frac{2\cancel{s}}{\cancel{s}(1+s^2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}(y) = u = H(t) - 2\sin(t) \cdot H(t) = 1 - 2\sin(t) \quad \text{per } t > 0$$

in generale considerando il prob. di Cauchy:

$$\begin{cases} a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t) \\ y(0) = y_1 \\ y'(0) = y_2 \end{cases}$$

trasformando si ha:

$$a_0\left(s^2 \mathcal{L}(y) - s y_1 - y_2\right) + a_1\left(s\mathcal{L}(y) - y_1\right) + a_2 \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(y) \cdot \left(a_0 s^2 + s a_1 + a_2\right) = \mathcal{L}(f) + a_1 y_1 + a_0 y_2 + a_0 s y_1$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(y) = \frac{a_0 s y_1 + a_1 y_1 + a_0 y_2 + \mathcal{L}(f)}{a_0 s^2 + s a_1 + a_2} = \frac{a_0 s y_1 + a_1 y_1 + a_0 y_2}{a_0 s^2 + s a_1 + a_2} + \underbrace{\frac{\mathcal{L}(f)}{a_0 s^2 + s a_1 + a_2}}_{\substack{\text{potrei avere dei} \\ \text{problemi ad} \\ \text{antitrasformare} \\ \text{se } L(f) \text{ non è una} \\ \text{funzione razionale}}}$$

se $L(f)$ è razionale anche $\mathcal{L}(y)$ lo è

questo è vero $\forall$ ordine di eq. diff. lin.:

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \cdot y^{(n-k)} \cdot (0^+) \quad (\text{polinomio in } s)$$

sarà dunque utile il metodo di decomposizione in frazioni parziali

e.s.

$$f(s)=\frac{2s+3}{(s-1)(s+1)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s+1)}$$

$$\Rightarrow As+A+Bs-B=2s+3$$

$$\Rightarrow (A+B)s+A-B=2s+3 \Rightarrow \begin{cases}A+B=2\\ A-B=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B=2-A=-\frac{1}{2}\\ A-2+A=3 \Rightarrow A=\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2s+3}{(s-1)(s+1)}=\frac{5/2}{(s-1)}-\frac{1/2}{(s+1)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(f)=\frac{5}{2}\cdot e^{+t}-\frac{1}{2}e^{-t}$$

In generale sapendo che $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{c}{(s-a)^{n+1}}\right)=c\cdot e^{at}\cdot\frac{t^n}{n!}$ scomponendo in frazioni troverò sempre l'antitrasformata

osserviamo anche che: $\mathcal{L}((t-t_0)^n\cdot H(t-t_0))=e^{-t_0 s}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad Re[s]>\emptyset$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-t_0 s}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}\right)=(t-t_0)^n\cdot H(t-t_0)$$

teo. valore iniziale

sia f $\mathcal{L}$-trasf., $f\in C^1([0,+\infty))$ t.c. f' sia $\mathcal{L}$-trasf. (f, f' segnali)

allora $\Rightarrow$ $f(0^+)=\lim_{s\to+\infty} s\cdot\mathcal{L}(f)$

infatti

$$\mathcal{L}(f')=s\cdot\mathcal{L}(f)-f(0^+) \Rightarrow f(0^+)=s\,\mathcal{L}(f)-\mathcal{L}(f')\sim s\,\mathcal{L}(f) \text{ per } s\to\infty$$

teo. del val. finale

sia $f\in C^1([0,+\infty))$ $\mathcal{L}$-trasf. t.c. f' sia $\mathcal{L}$-trasf. e sia $\sigma(f')<\emptyset$

allora $\Rightarrow$ $\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{s\to\emptyset} s\,\mathcal{L}(f)$

e.s.

$$f(t)=t^2 \Rightarrow \mathcal{L}(f)=\frac{2}{s^3}$$

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\cdot\mathcal{L}(f)=\lim_{s\to\infty}\frac{2}{s^2}=\emptyset$$

(infatti $f(0^+)=\emptyset$)

oss.

la trasf. di Laplace è uno strumento utile per risolvere altre tipologie di problemi oltre le eq. diff.

e.s.

$$\begin{cases}u'(t)+2u(t)+\int_0^t u(\sigma)d\sigma=1\\ u(0)=0\end{cases}$$

(u segnale)
(equazione integrale)

$$\Rightarrow s\,\mathcal{L}(u)-\underbrace{\cancel{u(0)}}_{0}+2\,\mathcal{L}(u)+\frac{1}{s}\mathcal{L}(u)=\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u)\left(s+\frac{1}{s}+2\right)=\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u)\left(\frac{s^2+2s+1}{s}\right)=\frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}(u)=\frac{1}{s^2+2s+1}=\frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow u=e^{-t}\cdot t \quad (t>\emptyset)$$

oss.

quest'ultima eq. è un caso particolare di eq. di convoluzione

$$\begin{cases} u' + u + h * u = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \Rightarrow \quad s\mathcal{L}(u) - u_0 + \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(h)\cdot\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(f)$$

se $h = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(h) = \frac{1}{s} \Rightarrow$ ricadiamo nel caso particolare di prima

· la trasf. di Laplace si applica anche alle eq. alle derivate parziali

e.s.

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - u & t>0,\ x>0 \\ u(x,0) = 6e^{-3x} \end{cases}$$

cerco una soluz. lim. per $t>0, x>0$

applico la trasf. rispetto $t \Rightarrow \mathcal{L}(u) = \int_0^t e^{-st} \cdot u \, dt$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = s\mathcal{L}(u) - \underbrace{u(x,0^+)}_{6e^{-3x}}$$

$$\Rightarrow 2s\mathcal{L}(u) - 12e^{-3x} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \mathcal{L}(u)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\cdot e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \int_0^t u(x,t) e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(u)$$

$$\Rightarrow 2s\mathcal{L}(u) - 12e^{-3x} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u)$$

$$\mathcal{L}(u) = y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} - (2s+1)y = 12e^{-3x}$$ eq. diff. lin. nella var. x

$$\left(y' - (2s+1)y = 12e^{-3x}\right)$$

eq. di Lagrange: $y' + a(x)y = b(x)$ $\quad F(x) := e^{\int a(x)dx} \Rightarrow F' = aF$

$$\Rightarrow y'F + \underbrace{ayF} = bF$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(yF) = y'\cdot F + ayF \Rightarrow ayF = \frac{\partial}{\partial x}(yF) - y'F$$

$$\Rightarrow \cancel{y'F} + \frac{\partial}{\partial x}(yF) - \cancel{y'F} = bF \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(yF) = bF$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial x}(yF)\,dx = \int bF\,dx \Rightarrow YF = \int bF\,dx + c$$

$$\Rightarrow y e^{\int a(x)dx} = \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx + c \Rightarrow y = e^{-\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) e^{\int a(x)dx} dx + c\right]$$

quindi nel nostro caso : $\begin{cases} a(x) = -(2s+1) \\ b(x) = -12e^{-3x} \end{cases}$

$$\int -(2s+1)\,dx = -(2s+1)\int dx = -(2s+1)x$$ s è un parametro della trasf. di Laplace!

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(u) = y = e^{(2s+1)x} \cdot \left[\int -12 e^{-3x} \cdot e^{-(2s+1)x} \, dx + c \right]$$

$$-12 \int e^{-2(s+2)} \, dx = +\cancel{12}^{\,6} \cdot \frac{1}{\cancel{2}(s+1)} e^{-2(s+2)x}$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{(2s+1)x} \cdot \left[\frac{6}{(s+2)} \cdot e^{-2(s+2)x} + c \right]$$

$$= \frac{6}{s+2} e^{x(\cancel{2s}+1-\cancel{2s}-4)} + c e^{(2s+1)x}$$

$$= \frac{6}{(s+2)} e^{-3x} + c e^{(2s+1)x}$$

siccome cerco una sol. lim. per $x > 0$ $\quad y \not\to \infty$ per $x \to \infty$ $\quad$ quindi $\Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(u) = y = \frac{6}{(s+2)} \cdot e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \quad u = 6 \cdot e^{-2t} \cdot e^{-3x} \quad \text{per } t, x > 0$$

oss.

grazie alla proprietà $\mathcal{L}(u(t-t_0) \cdot H(t-t_0)) = \mathcal{L}(u) \cdot e^{-t_0 s}$
posso anche trattare eq. diff. alle differenze

e.s.

$$\begin{cases} u'(t) + u(t-1) = t^2 & t > 0 \\ u(t) = 0 & \forall t \le 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}(u) = y$

$$\Rightarrow \quad sy - 0 + y e^{-s} = \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow \quad sy + y e^{-s} = \frac{2}{s^3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{s^3 (s + e^{-s})} = \frac{2}{s^4 (1 + e^{-s}/s)}$$

$$y = \frac{2}{s^4} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1 + e^{-s}/s)}}_{\frac{1}{1 - (-e^{-s}/s)}}$$

dove $-\frac{e^{-s}}{s} = q$, $|q| \le 1$ per $\left|\frac{e^{-s}}{s}\right| < 1$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{s^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{e^{-s}}{s} \right)^n$$

$$= \frac{2}{s^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{e^{-s}}{s} \right)^n$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^{-sn}}{s^{n+4}}$$

sotto det. condizioni
si può antitrasformare

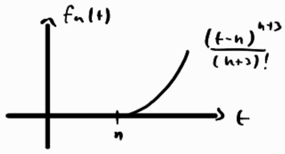
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-ns}}{s^{n+4}} \right) = \begin{cases} \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \ge n \\ 0 & t < n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = 2 \sum_{n=0}^{[t]} (-1)^n \cdot \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}$$

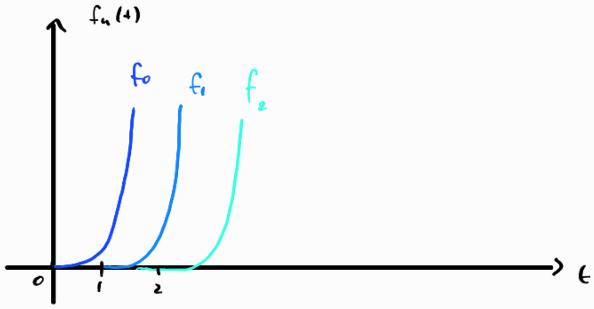
dove $[t]$ = numero intero $\le t$

oss.

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \geq n \\ \varnothing & t < n \end{cases}$$



quando si considera la somma $f_0 + f_1 + f_2 + \dots$ si ha che: il contributo di f_1 arriva solo dopo $t \geq 1$, il contributo di f_2 arriva dopo $t \geq 2$ e così via



teo. delle distribuz.

- la teo. delle distribuzioni nasce dalla necessità di generalizzare alcuni concetti fondamentali della matematica, come i concetti di funzione o derivata

gli spazi $C^k([a,b])$, o $C^k(\Omega)$ in $\mathbb{R}^n$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato, sono spazi di Banach se vengono def. con la norma "naturale" (cioè $\|f\|_{C^k([a,b])} = \sum_{n=0}^{k} \|f^{(n)}\|_{C^0([a,b])}$)

nel caso in cui si consideri $C^\infty([a,b])$ se utilizzassimo la medesima strategia si dovrebbe considerare:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u^{(k)}\|_{C^0([a,b])}$$

ma in generale questa serie è divergente

↳ C^∞ non può essere normato come C^k (e per ciò non è di Banach)

considero:

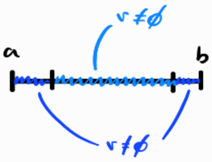
$$C_0^1([a,b]) = \{u \in C^1([a,b]) \text{ t.c. } \overbrace{\text{supp } u}^{\text{supporto di } u} \subset K\}$$

dove K è chiuso e limitato su $[a,b]$ (compatto)

dove supp u è la chiusura dell'insieme dove $u \neq \emptyset$

considerando: $u \in C^1([a,b])$, $v \in C_0^1([a,b])$

allora $\Rightarrow \int_a^b u'v = \underbrace{\cancel{[uv]_a^b}}_{\emptyset} - \int_a^b uv' \Rightarrow \int_a^b u'v = -\int_a^b uv'$



In generale, iterando per $u \in C^\infty([a,b])$ e $v \in C_0^\infty([a,b])$

allora $\Rightarrow \underbrace{\int_a^b u^{(k)} v}_{①} = \underbrace{(-1)^k \int_a^b u v^{(k)}}_{②}$

se $u \notin C^\infty([a,b])$ il termine ① non è ben def., ma se u è in qualche modo integrabile, il termine ② invece è ben def., e <u>definisco</u> il primo termine con il secondo

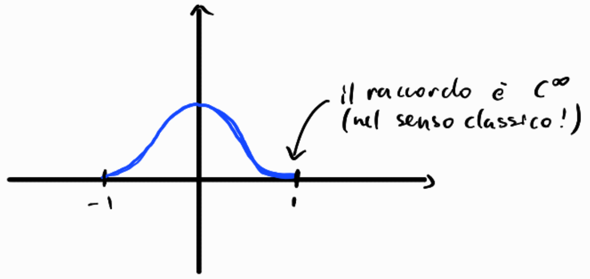
def. funzioni test: dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, lo spazio delle funzioni test su Ω è lo spazio vettoriale:

$$D(\Omega) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(In pratica le φ usate fin'ora sono funzioni test)

e.s.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x|<1 \\ \emptyset & |x|>1 \end{cases}$$



def. convergenza di $D(\Omega)$: data una successione $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset D(\Omega)$ e sia $\varphi \in D(\Omega)$

dico che $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega)$ se $\exists$ un compatto $K\subset\Omega$ t.c.:

* $\text{supp}\, \varphi_j \subset K \quad \forall j$
* $\forall\alpha$ multiindice si ha: $\varphi_j \to \varphi \ \wedge \ D^\alpha\varphi_j \to D^\alpha\varphi$ uniformemente in K

- quella della convergenza uniforme delle derivate è molto forte, ma darà una grossa libertà sui funzionali

def. distribuz. $\underbrace{D'(\Omega)}_{\text{(duale di } D(\Omega))}$: l'insieme delle distribuz. su Ω, indicato con $D'(\Omega)$, è l'insieme di tutti i funzionali lineari e continui su $D(\Omega)$:

$$D'(\Omega) = \{T: D(\Omega) \to \mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C}),\ T \text{ lineare e continuo}\}$$

la continuità è intesa rispetto alla convergenza che abbiamo introdotto su $D(\Omega)$

precisamente:

siano $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\varphi\in D(\Omega)$. T è continuo se:

$$\varphi_j \xrightarrow[D(\Omega)]{} \varphi \Rightarrow \underbrace{T(\varphi_j)}_{\text{successione di numeri}} \longrightarrow \underbrace{T(\varphi)}_{\text{converge a un numero}}$$

notazione:

$$T(\varphi) \Rightarrow \langle T, \varphi\rangle$$

$T\in D'(\Omega)$ $\quad \varphi\in D(\Omega)$

oss.

le distribuz. sono funzionali lineari e continui su $D(\Omega)$

contrariamente agli spazi L^p dove tutti i funz. lin. e cont. si rappresentano tramite l'integrale e la misura di Lebesgue, i funzionali di $D'(\Omega)$ non si possono rappresentare tutti con integrale e misura di Lebesgue

distribuzioni regolari

def. funzioni localmente integrabili $L^1_{loc}(\Omega)$: lo spazio delle funz. localmente integrabili su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ misurabile t.c. } \underbrace{f|_K}_{\substack{\text{restrizione di} \\ f \text{ ai punti di } K}} \in L^1(K), \forall K \subset \Omega, K \text{ compatto} \}$$

- cioè f è integrabile su ogni compatto di Ω

se prendiamo $\Omega = \mathbb{R}$, $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ significa prendere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($o\ \mathbb{C}$) misurabile t.c.

$$\int_{[a,b]} |f| \, dx < +\infty \quad \forall [a,b] \subset \mathbb{R}$$

e.s.

$f \in C^0(\mathbb{R})$

$f \in L^\infty(\mathbb{R})$

ma anche $f = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

def. distribuz. regolare: sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Definiamo il funzionale:

$$T_f : D(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) \, dx$$

distribuz. regolare

teo.

se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ allora $\Rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f \varphi \, dx$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$ è lineare e continuo su $D(\Omega)$

dim.

è lineare per la linearità dell'integrale

è continuo: essendo T un funzionale lineare basta verificare la continuità in $\emptyset$

cioè $\{\varphi_j\} \in D(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi_j \to \emptyset$ in $D(\mathbb{R}) \Rightarrow \langle T_f, \varphi_j \rangle \to \emptyset$ (per $j \to \infty$)

infatti:

$$|\langle T_f, \varphi_j \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f \cdot \varphi \, dx \right| = \left| \int_K \varphi_j f \, dx \right| \le \int_K |\varphi_j| \cdot |f| \, dx \le \int_K \sup_{x \in K} |\varphi_j| \cdot |f| \, dx = \sup_{x \in K} \varphi_j \cdot \int_K |f| \, dx = \|\varphi_j\|_{C^0(K)} \cdot \|f\|_{L^1(K)}$$

(f è $L^1_{loc}(\mathbb{R})$)

quindi $\varphi_j \to \emptyset \Rightarrow \|\varphi_j\|_{C^0(K)} \to \emptyset \Rightarrow |\langle T_f, \varphi_j \rangle| \to \emptyset$ (per $j \to \infty$, $\varphi_j \to \emptyset$)

(e ne consegue anche $|D^\alpha \varphi_j| \to \emptyset$)

oss.

se prendessimo $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega)$ (per $j \to \infty$) (cioè $\varphi_j \to \varphi$ uniformemente, e anche le deriv.)

$$|\langle T_f, \varphi_j\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi_j - \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} f\cdot(\varphi_j - \varphi)\, dx\right| \leq \int_K |\varphi_j - \varphi|\cdot f\, dx$$

per la convergenza uniforme $\sigma_j := \sup_{x\in K} |\varphi_j - \varphi| \to \emptyset$ per $j \to +\infty$

$$|\langle T_f, \varphi_j\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| \leq \sigma_j \cdot \|f\|_{L^1(K)} \to \emptyset \quad \text{per } \varphi_j \to \varphi, \text{ per } j \to +\infty$$

teo.

siano $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ t.c. $\langle T_f, \varphi\rangle = \langle T_g, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$

allora $\Rightarrow$ $f = g$ q.o.

- relaziono f e g tramite i funzionali
- il fatto che l'uguaglianza vale $\forall \varphi$ implica un legame tra T_f e T_g

oss.

mi dice che sostituendo nel funzionale $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi\, dx$ tutte le funz. di $D(\mathbb{R})$ la funzione distingue il funzionale

In altre parole quando calcolo $\int_{\mathbb{R}} f\varphi\, dx$ solo per alcune funzioni $\varphi \in C_0^\infty$ allora la relaz. $\int_{\mathbb{R}} f\varphi\, dx = \emptyset$ non assicura che $f = 0$ q.o.

ma prendendo tutte le $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ allora la relaz. integrale $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0$ implica la relaz. puntuale

def. delta di Dirac: sia $x_0 \in \mathbb{R}$ def. delta di Dirac concentrata nel pt. $x_0 \in \mathbb{R}$ il funzionale:

$$\delta_{x_0} : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0)$$

(chiaramente non è una distribuz. regolare)

teo. $\delta_{x_0} \in D'(\mathbb{R})$

dim.

linearità:

$$\langle \delta_{x_0}, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = (\lambda\varphi + \mu\psi)(x_0) = (\lambda\varphi)(x_0) + (\mu\psi)(x_0) = \lambda\varphi(x_0) + \mu\varphi(x_0)$$
$$= \lambda\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle + \mu\langle \delta_{x_0}, \psi\rangle \qquad \forall \varphi, \psi \in D(\mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

continuità:

preso $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega)$ si ha:

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi_j\rangle - \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle| = |\varphi_j(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}} |\varphi_j(x_0) - \varphi(x_0)| = \|\varphi_j - \varphi\|_{C^0(\mathbb{R})} \to \emptyset$$

($\varphi_j \to \varphi$ uniformemente)

derivata di una distribuz.

se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $\Rightarrow \int f' \varphi \, dx = -\int_{\mathbb{R}} f \cdot \varphi' \, dx \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

In generale:

se $f \in C^k(\mathbb{R})$ allora: $\int_{\mathbb{R}} f^{(k)} \cdot \varphi = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f \varphi^{(k)} \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

se siamo in $\mathbb{R}^n$ questi risultati si estendono in modo naturale

se $f \in C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e α è un multiindice di lunghezza $|\alpha| \leq k$ allora:

$$\int_{\Omega} (D^{\alpha} f) \varphi := (-1)^k \int_{\Omega} f (D^{\alpha} \varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

(se D^{α} è def. in senso classico allora ho l'uguaglianza)
(se D^{α} non è ben def. in senso classico, è la def. di derivata debole)

def. derivata di una distribuzione: $\forall T \in D'(\mathbb{R})$ (o $D'(a,b)$) definisco derivata di T il funzionale:

$$T' : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

teo.

$$\forall T \in D'(\mathbb{R}) \Rightarrow T' \in D'(\mathbb{R})$$

cioè T' è una distribuzione

dim.

linearità:

$$\langle T', \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = -\langle T, (\lambda\varphi + \mu\psi)' \rangle = -\langle T, \lambda\varphi' + \mu\psi' \rangle$$
$$= -\langle T, \lambda\varphi' \rangle - \langle T, \mu\varphi' \rangle = -\lambda\langle T, \varphi' \rangle - \mu\langle T, \varphi' \rangle = \lambda\langle T', \varphi \rangle + \mu\langle T', \psi \rangle$$

continuità:

$$|\langle T', \varphi_j \rangle| = |-\langle T, \varphi_j' \rangle| \longrightarrow \emptyset \quad \text{in quanto}$$

$\varphi_j \in D(\Omega)$ e quindi $\varphi_j' \to \emptyset$ uniformemente
per $j \to \infty$ (se $\varphi_j \to \emptyset$ per $j \to \infty$)

oss.

siccome la nozione di derivata di distribuz. è definita mediante l'integrale non guardiamo più le prop. puntuali, ma globali dei funzionali

- il fatto che la def. si può estendere iterando l'integraz. per parti implica che ogni distribuz. è derivabile ∞ volte

corollario:

se $T \in D'(\mathbb{R})$ allora $T^{(k)} \in D'(\mathbb{R})$ e vale: $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

e.s.

sia $H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ \emptyset & x \leq 0 \end{cases}$ allora $\Rightarrow \langle T_H', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

infatti:

$H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ quindi:

$$\langle T'_H, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H \varphi' dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \left[-\varphi(x)\right]_0^{+\infty} = -\left[\cancel{\varphi(\infty)} - \varphi(0)\right] = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \underline{\forall \varphi \in D(\mathbb{R})}$$

$\emptyset$ (φ nulla agli estremi)

quindi nel senso dei funzionali: $H' = \delta$ in $D'(\mathbb{R})$

<u>oss.</u>

si può anche calc. H'' infatti:

$$\langle H'', \varphi \rangle = -\langle H', \varphi' \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) \quad \forall \in D(\mathbb{R})$$

$\hookrightarrow \langle H'', \varphi \rangle = -\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

abbiamo implicitamente calc. $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$

e in generale: $\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

alcune <u>operaz. sulle distribuz.</u>

- nonostante l'operaz. di derivaz. sia facile da trattare coi funzionali, operazioni più "semplici" come la moltiplicaz. sono più delicate da trattare

supponiamo che $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ che sappiamo def. la distribuz. $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

se g è una funz. è naturale considerare $g T_f$ come $\langle g T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, g\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

ma se $g\varphi \notin D(\mathbb{R})$ non ho più una distribuz.!!

quindi:

se $g \in C^\infty$ allora $\Rightarrow g\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (g\varphi \in D(\mathbb{R}))$

def. prodotto funzione per distribuz.: sia $T \in D'(\Omega)$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$ e $g \in C^\infty(\Omega)$

def. $gT \in D'(\Omega)$ come: $\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$

def. successione di distribuz.: siano $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$; $T \in D'(\Omega)$

diremo che $T_k \to T$ in $D'(\Omega)$ se $\langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$

oss.

nell'ambito delle distribuz., succ. che non sono conv. puntualmente, risultano essere convergenti

e.s.

sia $f_n : \sin(nx)$ non converge per $n \to \infty$

In ambito distribuzionale: $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ quindi $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n \varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi \sin(nx)\, dx$ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

integrando per parti: $\int_{\mathbb{R}} \varphi \sin(nx)\, dx = \underbrace{\left[\varphi - \frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\emptyset} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi' \frac{1}{n}\cos(nx) dx}_{\to \emptyset \text{ in quanto è limitata oscillante}} \longrightarrow \emptyset$

(fuori dal compatto ho $\varphi = \emptyset$)

quindi $T_{f_n} \to \emptyset$ in $D'(\mathbb{R})$

def. serie di distribuz.: siano $T, \{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in D'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

dico che $\sum_{k=1}^{\infty} T_k = T$ in $D'(\Omega)$

se $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} T_k = T$ in $D'(\Omega)$

oss.

per def. di serie di distribuz.:

$$\lim_{N \to +\infty} \langle \sum_{k=1}^{N} T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

quindi

$$\langle \lim_{N} \sum_{k=1}^{N} T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

automaticamente: $\sum_{k=1}^{\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} T_k, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$